

Univerzitet u Nišu
Fakultet zaštite na radu

Dejan M. Petković

Elektromagnetna zračenja
Sveska III

ELEKTROMAGNETIZAM

Niš, 2016. godine

Autor

Dr Dejan (Milan) Petković, redovni profesor
Fakultet zaštite na radu, Niš

Naslov

Elektromagnetna zračenja, Sveska III
ELEKTROMAGNETIZAM

Prvo izdanje, Niš, April 2016.

Izdavač

Fakultet zaštite na radu, Niš
18000 Niš, Černojevića 10a

Za izdavača

Dekan fakulteta, dr Momir Praščević, redovni profesor

Recenzenti

Dr Slavoljub Aleksić, redovni profesor,
Elektronski fakultet, Niš
Dr Dejan Krstić, vanredni profesor,
Fakultet zaštite na radu, Niš

Odlukom Naučno-nastavnog veća Fakulteta zaštite na radu u Nišu,
kvalifikovano kao osnovni udžbenik.

Tehnička obrada

Autor

Korice

Rodiljub Avramović
Fakultet zaštite na radu, Niš

Štampa

Unigraf-X-Copy, Niš

Tiraž

200 primeraka

ISBN 978-86-6093-015-8

Ljiljani, Milici i Mirjani

Sadržaj

MAGNETOSTATIKA

Uvod u magnetizam	15
Öerstedovi eksperimenti	16
Ampèreovi eksperimenti	17
1 Magnetna sila i magnetno polje	19
2 Zakon sile	20
3 Moment sila na strujnu konturu	21
4 Magnetni dipol	22
5 Magnetni dipolni moment	23
6 Orbitalni magnetni moment elektrona	24
7 Magnetni moment kružne konture	25
8 Magnetni dipolni moment kružne ploče	25
9 Magnetni moment sferne ljuske	26
10 Magnetni moment masivne sfere	26
11 Elektromagnetna ili Lorentzova sila	28
12 Elektromagnetna sila i Hallov efekt	29
13 Nalektrisana čestica u homogenom magnetnom polju	30
14 Elektron u ukrštenom elektromagnetnom polju	31
15 Thompsonov eksperiment i maseni spektrometar	33
16 Fluks vektora magnetnog polja	34
17 Zakon o konzervaciji magnetnog fluksa	34
18 Magnetne sile ne vrše rad?	35
19 Ampèreov zakon	37
20 Polje magnetne sile nije konzervativno?	38
21 Biot-Savartov zakon	39
22 Ampère i Biot-Savart	42
23 Magnetno polje koaksijalnog voda	43
24 Magnetno polje solenoida i torusa	44
25 Magnetno polje u ekscentričnoj šupljini	45
26 Magnetno polje strujnog plašta	45
27 Magnetno polje prave strujne niti - 1	46
28 Magnetno polje prave strujne niti - 2	47
29 Magnetna sila između dva strujna elementa	48
30 Magnetno polje i sile dve paralelne strujne niti	49
31 Jedinica za jačinu struje - amper	50
32 Pravougaona strujna kontura	51
33 Mnogougona i kružna strujna kontura	52
34 Magnetno polje kružnog luka i poluprave	53
35 Magnetno polje na osi mnogougone konture	53
36 Mogućnost procene jačine magnetnog polja	54
37 Helmholtzovi i gradijentni kalemovi	55
38 Magnetno polje na osi solenoida	57

39	Magnetni vektor potencijal	59
40	Magnetni vektor potencijal pravog provodnika	60
41	Magnetni vektor potencijal prave strujne niti	62
42	Analogija između strujne niti i naelektrisane niti	63
43	<i>Ampère-Laplace-Biot-Savartov</i> zakon	64
44	Kružna strujna kontura - magnetni dipol	65
45	Magnetni vektor potencijal solenoida	69

MAGNETNO POLJE U MATERIJI

46	Magnetno polje u materiji - magnetizacija	73
47	Vezane struje	74
48	Analogija između magnetnog i električnog dipola	76
49	Uopšteni <i>Ampèreov</i> zakon i magnetizaciono polje	77
50	Linearne magnetne sredine	78
51	Homogeno namagnetisana sfera	79
52	Vezane struje u pravom provodniku	80
53	Magnetno polje solenoida - elektromagnet	81
54	Granični uslovi	82
55	Dijamagnetici, paramagnetici i feromagnetici	84
56	Magnetna susceptibilnost dijamagnetika	85
57	Feromagnetici	86
58	<i>Curieova</i> temperatura	87
59	Magnećenje feromagnetika	87
60	Histerezis	88
61	Podela feromagnetika	89
62	Teorema lika u ravnom feromagnetnom ogledalu	90
63	Uopštenje teoreme lika	91
64	Magnetni skalar potencijal i magnetne pseudomase	92
65	Homogeno namagnetisan štap - stalni magnet	94
66	Solenoid, stalni magnet i elektromagnet	95
67	Sfera od linearnog magnetika u homogenom polju	96
68	Sfera od (fero)magnetika u homogenom polju	97
69	Pasivna magnetna zaštita	101
70	Efikasnost magnetne zaštite	100
71	Magnetno polje planete zemlje	103
72	Magnetna otpornost i <i>Hopkins'Rowlandov</i> zakon	105
73	Torusni namotaj pravougaonog poprečnog preseka	106
74	Linearna magnetna kola i linearna električna kola	107
75	Nelinearna magnetna kola	108

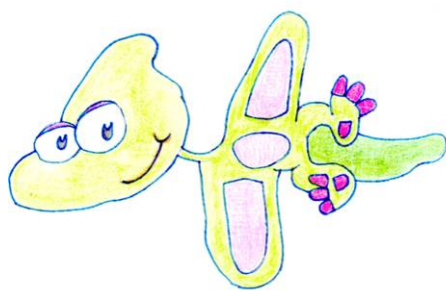
PROMENLJIVA POLJA

	<i>Michael Faraday</i>	111
	<i>Faradayeva</i> formulacija elektromagnetne indukcije	113
	<i>Faraday -Llantz - Neumannov</i> zakon	114
76	Zakon elektromagnetne indukcije	115

77	Dinamička indukcija nije indukcija?	116
78	Model generatora jednosmernog napona - 1	117
79	Model motora jednosmerne struje	118
80	Slobodan pad konture u magnetnom polju	118
81	Relativno kretanje konture u magnetnom polju	119
82	Fluksmetar	120
83	Model genaratora naizmeničnog napona	121
84	Model generatora jednosmernog napona - 2	121
85	Druga <i>Maxwellova</i> jednačina	122
86	Indukovano električno polje - beskonačan solenoid	123
87	Fluksevi dve koaksijalne kružne konture	124
88	Induktivnost i <i>Neumannova</i> formula	125
89	Međusobna induktivnost dve kružne konture	127
90	Samoinduktivnost i kružna konture	129
91	Induktivnost pravih paralelnih odsečaka	131
92	Dvožični vod i dva dvožična voda	132
93	Koaksijalni solenoidi	133
94	Model transformatora	134
95	Energija magnetnog polja	135
96	Energija solenoida	139
97	Unutrašnja induktivnost pravog provodnika	140
98	Podužna induktivnost koaksijalnog voda	140
99	Energija spregnutih kontura	141
100	Struja u kolu sa otpornikom i kalemom - <i>RL</i> kolo	144
101	Pražnjenje kondezatora preko kalema - <i>LC</i> kolo	146
102	Otpornik, kalem i kondenzator - <i>RLC</i> kolo	147
103	Energija i sila	149
104	Noseća sila (elektro)magneta	151
105	Površinski efekat	152
106	Efekat vrtložnih struja	156
107	Ffekat blizine	158
108	Uslovi kvazistatičnosti magnetnog polja	159
109	Prva <i>Maxwellova</i> jednačina	161
110	Sistem <i>Maxwellovih</i> jednačina	163

PRILOZI

A	Zbunjujući nazivi za magnetno polje	167
B	Kratka istorija magnetizma	168
C	Gustina energije permanentnih magneta	171
D	Osnovne jednačine kinematike	171
E	Izračunavanje potpunih eliptičkih integrala	172
	Indeks imena	173
	Literatura	175



Mirjana Radić, 2016

Predgovor

Moja osnovna ideja je da, kroz seriju Sveski iz oblasti elektromagnetike, studentima i inženjerima pružim kompletnu literaturu potrebnu za temeljno proučavanje problema elektromagnetnih polja. Pred čitaocima je treća Sveska.

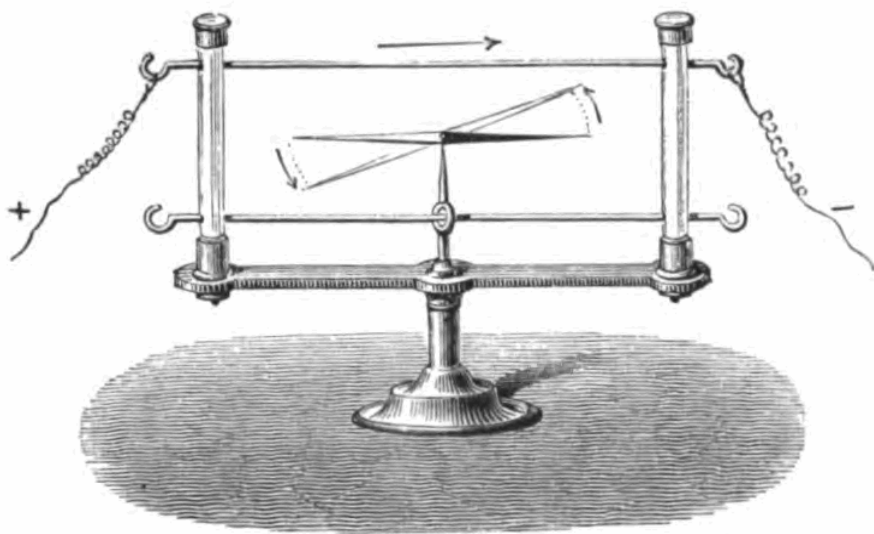
Elektromagnetizam sam napisao kao knjigu kakvu bih ja želeo da koristim, knjigu u kojoj bih u trenutku pronašao baš ono mi je potrebno, knjigu u kojoj nema objašnjavanja onoga što je očigledno, knjigu bez nejasnoća, knjigu koja je vodič kroz tajanstveni svet elektromagnetnih polja, knjigu koja se može čitati preko reda. Trudio sam se da napišem knjigu koja se može čitati kao ukrštene reči. Vertikalno, proučavajući samo glavne teme, i horizontalno, razrađujući jednu temu. Takođe, trudio sam se da knjigu napišem kratko i sažeto jer znam da nemam pravo da čitaocima oduzimam vreme.

Elektromagnetizam sam napisao na pragu izumiranja klasične elektromagnetike. Danas, većina inženjera, ali i studenata, sve probleme elektromagnetike rešava upotrebom gotovih programskih paketa koji su zasnovani na metodu konačnih elemenata. Ja nema ništa protiv toga, ali smatram da takve alate treba koristiti samo za vizuelizaciju rešenja, a nikako kao jedini put za rešavanje problema. To je neosvetljen put na kome se fizička stvarnost ne vidi.

Tekst će moći da se nađe i na adresi **www.znrfak.ni.ac.rs**, sve dok neko drugi ne bude odlučio drugačije.

U Nišu, Uskrs, 2016. godine,
DMP

MAGNETOSTATIKA





Mirjana Radić, 2016

Uvod u magnetizam

Prema nekim podacima Kinezi su saznali za magnet negde 4000 godina pre nove ere, a da komad jedne rude privlači sitnije komade gvožđa bilo je poznato još u drevnoj Grčkoj. Ruda je nazvana magnetit (Fe_3O_4), a cela pojava magnetizam, prema gradu Magnezija u Maloj Aziji u čijoj blizini su bila nalazišta ove rude. Primetili su da gvozdена šipka koja je bila u kontaktu sa magnetom dobija privlačna svojstva. O odbojnim pojavama nigde se ne govori. Odbojne sile nisu mogle da se uklope u *Aristotel*sovo učenje i učenje njegovih sledbenika. Tek u VI veku nove ere odbijanje kod magneta pominje hrišćanin *Jovan Filopon*, ali naelektrisana tela i magneti nisu ničim povezivani. Arapi su u XII i XIII veku helenistička učenja o kvalitetu privlačenja skoro neizmenjena preneli u Evropu. Međutim, preneli su i zablude. Mada o magnetu nema mnogo pouzdanih zapisa, ostalo je da magnet gubi privlačna svojstva ako se protrlja belim lukom. To se uklapalo u opštu teoriju kvaliteta, jer u ovom slučaju dolazi do promene kvaliteta. Kako je u to vreme kompas bio u redovnoj upotrebi, navigatorima na brodovima je bilo zabranjeno da jedu beli luk. Doba renesanse je izuzetno značajno za magnet (kompas) zbog interesovanja za daleka putovanja. Treba izdvojiti da je *Porta* prvi upotrebio gvozdene opiljke da bi na listu hartije načinio sliku linija sila i da je prvi koji tvrdi da beli luk ne utiče na magnet.

U *Gilbert*ovom učenju pominju se severni **N** (Eng. *North-sever*) i južni **S** (Eng. *South-jug*) magnetni pol i ukazuje se na osobinu da se istoimeni polovi odbijaju, a raznoimeni privlače. Sličnost mehaničkih pojava kod magneta i naelektrisanih tela dovela je do ideje o postojanju magnetnih masa koje su raspoređene oko polova.



Međutim, pozitivna i negativna naelektrisanja je bez teškoća moguće razdvojiti, a magnetne mase nikako, na primer lomeći magnetni štap do najsitnijih komada. Tako je *Gilbert* došao do sasvim pogrešnog zaključka da su elektricitet i magnetizam slične pojave, ali da nemaju nikakve međusobne veze.

Fizičari su uporno ukazivali na razlike između elektriciteta i magnetizma i tako je ostalo sve do XVIII veka. Tek tada je počela da se javlja ideja o vezi između električnih i magnetnih pojava. Primećeno je da za vreme oluje magnetna igla kompasa ili osciluje u svim pravcima ili se ukoči ma u kom položaju da se nalazi. Zahvaljujući *Franklinu* i njegovom eksperimentu sa zmajem od papira koga je puštao u oblake za vreme oluje, zagonetka magneta postaje predmet proučavanja mnogih fizičara.

Örstedovi eksperimenti

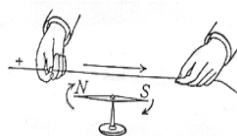
Problem magnetna privukao je pažnju danskog prirodnjaka i lekara *Örsted*a



Stalno smo u iskušenju da upoređujemo magnetne i električne sile. Velika sličnost između električnih i magnetnih privlačenja i odbijanja i sličnost njihovih zakona nužno nameće takvo upoređenje



Örsted je do svog otkrića došao sasvim slučajno tokom jednog predavanja koje čak nije ni bilo posvećeno razmatranju veze elektriciteta i magnetizma. Međutim, nipošto se ne radi o slučajnosti, jer je on verovao da takva veza postoji i očekivao je da je nađe.



Örsted je ispod i iznad magnetne igle običnog kompasa postavio bakarnu žicu koja stoji u istom pravcu kao i igla kompasa, tj. u pravcu sever-jug. Krajevi žice bili su spojeni sa polovima galvanske baterije. Čim je kroz žicu počela da teče električna struja, igla je napustila svoj položaj i stala pod pravim uglom u odnosu na žicu. Dovoljno je bilo da se prekine veza sa baterijom da bi se igla vratila u svoj prvobitni položaj. *Örsted* je na osnovu svojih eksperimenata došao do zaključka da električna struja oko provodnika izaziva neku silu koja deluje na magnet.

*Örsted*ov glavni rad 'Eksperiment o uticaju električne struje na magnetnu iglu' je na latinskom jeziku objavljen jula 1820. godine. Već avgusta meseca *Örsted* objavljuje novi rad pod nazivom 'Novi elektromagnetni eksperiment', a taj rad sadrži i dva nova rezultata.

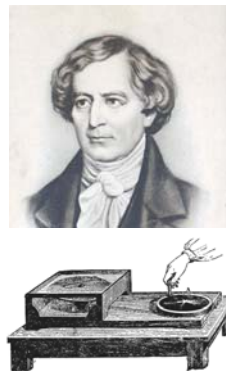
Iste godine *Davy*je upoznao *Faradaya* sa ovim radom, koji će biti od presudnog značaja kako za samog *Faradaya* tako i za ostale naučnike kojima je *Örsted*ov eksperiment poslužio kao postulat za dalja naučna otkrića.

Örsted uzima bateriju i strujno kolo zatvara kružnom konturom. Takvo strujno kolo se ponaša kao magnet sa severnim i južnim polom. *Örsted* prinosi takvom strujnom kolu drugi magnet zbog čega dolazi do rotacije, što je sasvim očekivana interakcija dva magneta. Rad *Novi elektromagnetni eksperiment* je ostao u senci njegovog glavnog dela, tako da se ponašanje strujnog kola kao magneta kasnije susreće tek kod *Ampèrea*.

Ampèreovi eksperimenti

Šta je zajedničko između elektriciteta i magneta? - bilo je pitanje koje je postalo još veća misterija posle *Ørstedovih* eksperimenata. Oko rešavanja te zagonetke je otpočelo takmičenje naučnika.

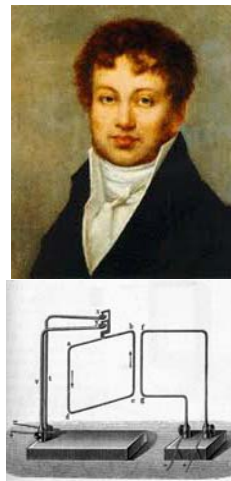
Francuska je u to vreme u nauci prednjačila. *Arago* je 1824. godine otkrio da rotirajući bakarni disk pomera iglu kompasa koja je iznad diska. Nije primetio da postoji i suprotan efekat, tj. rotitajući magnet dovodi do rotacije bakarnog diska. Bila je to demonstracija elektromagnetne indukcije i vrtložnih struja o kojima se u to vreme ništa nije znalo. Tek 1831. godine (lekcije 77 i 106) *Faraday* je objasnio *Aragoovu* rotaciju. Međutim, u to doba naučne vesti su se sporo širile.



Ampère je saznao za *Ørstedove* eksperimente i odmah je počeo da vrši eksperimente sa provodnicima. Zaključio je da se dva provodnika međusobno privlače ako po njima teku električne struje u istom smeru, a da se odbijaju ako su struje suprotnih smerova.

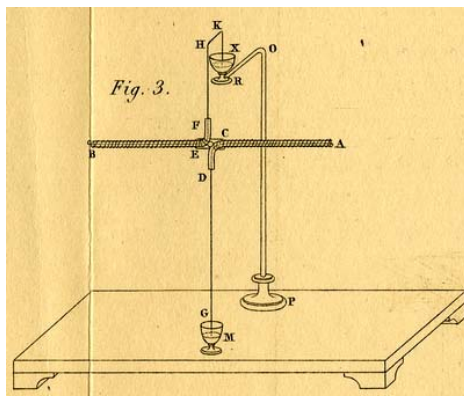
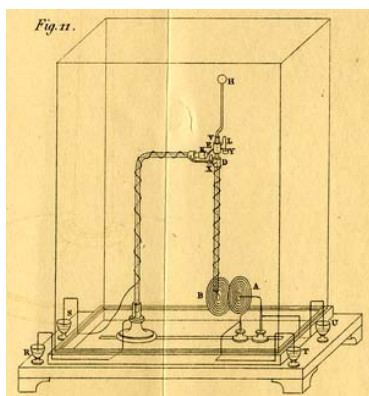
Iz ovih pojava *Ampère* je izveo matematički zakon uzajamnog dejstva dveju električnih struja (lekcija 31).

Ampère je prihvatio *Ørstedovu* pretpostavku da je skretanje magnetne igle uslovljeno silama koja deluju na iglu prostirući se oko provodnika po kome teče električna struja.



Zamislao je da oko svakog magneta postoje električne struje koje kao da okružuju magnet nevidljivim prstenovima. Od pravca tih struja zavisi pravac skretanja magnetne igle u *Ørstedovim* eksperimentima. Smatrao je da se te *magnetne struje* ni po čemu ne razlikuju od električnih struja i rukovodeći se tom idejom napravio je nešto poput električnog kompasa.

Električni kompas se sastojao od slobodno obešenog solenoida (Grk. σωλήν - cev, είδος - oblik) kroz koju je propuštana struja, a pri tom se ovaj kalem ponašao kao magnet sa severnim i južnim polom. Dva solenoida deluju jedan na drugi kao dva stalna magneta jer između polova solenoida dolazi do međusobnog privlačenja i odbijanja kao i kod stalnih magneta.



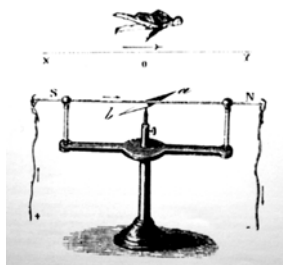
Ako električna struja prolazeći oko solenoida po spiralnim prstenovima, daje solenoidu magnetna svojstva, zašto ne bismo zamislili da i stalni magnet dobija svoja magnetna svojstva otuda što u njemu teku kružne električne struje.

Ova genijalna pretpostavka pokazala se kao tačna. Te struje su dobile naziv *Ampèreove* struje ili *Ampèreove* mikrostruje. Međutim, *Ampère* se dalje ne bavi stalnim magnetima već izvodi novi zaključak.

Ørstedova magnetna igla se okreće popreko prema provodniku po kome teče električna struja silom onih istih privlačenja i odbijanja koja se pojavljuju između dva provodnika po kojima teče električna struja. Osobnosti skretanja *Ørstedove* igle se objašnjavaju time što 'magnetne struje' imaju kružni pravac pa njihovo odbijanje i privlačenje provodniku prisiljava iglu na kružno kretanje.

Ampère je ove misli i rezultate svojih eksperimenata izrazio kao 'Pravilo plivača'.

Postojanje kružnih sila oko magneta kasnije se pokazalo kao nesumljivo, ali se *Farady* nije slagao sa *Ampèreovom* mišlju da magnetizam nije posebna prirodna sila, već vrsta elektriciteta.



Danas znamo da je kretanje naelektrisanja u makroskopskom ili mikroskopskom smislu jedini uzročnik postojanja magnetnog polja.

1. Magnetna sila i magnetno polje

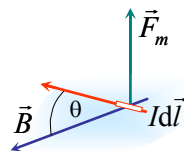
Postojanje elektrostatikog polja se utvrđuje postojanjem mehaničke (*Coulombove*) sile na probno naelektrisanje koje je uneto u polje. Osnovna vidljiva pojava koja ukazuje na postojanje magnetnog polja je mehanička sila koja deluje na provodnik kroz koji protiče struja.

Dakle, što je probno naelektrisanje za elektrostatikog polje, to je probni strujni element za magnetno polje.

$$B \sim \frac{dF_m}{I dl} \quad \leftarrow \quad E = \frac{dF_e}{dq}$$

Znači da strujni element treba da bude tako malih dimenzija da kad je unet u magnetno polje ne remeti strukturu postojećeg polja i dovoljno osetljiv da bi sila bila detektovana. Takav strujni element, bez pratećih provodnika koji obezbeđuju tok struje, praktično nije moguće realizovati i zato je ispitivanje magnetnog polja veoma složen zadatak.

Dok električno polje ima isti pravac kao i električna sila, a smer mu zavisi od znaka naelektrisanja, u magnetnom polju pravac i smer sile zavise i od smera struje u strujnom elementu ali i od položaja provodnika u odnosu na polje.



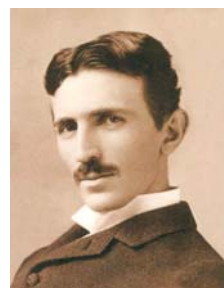
Eksperimentalno je utvrđeno da magnetna sila ima najveću vrednost kad je provodnik postavljen upravno na pravac polja.

$$dF_{\max} = BI dl$$

Maxwell je u svom kapitalnom delu *Treatise on Electricity and Magnetism* za vektore koristio redom slova *A* do *H*. Koeficijentu srazmernosti u izrazu za magnetnu silu je po redosledu, odmah posle magnetnog vektora potencijala *A*, pripalo slovo *B*. Neke od oznaka su do danas zadržane. Taj koeficijent srazmernosti je magnetno polje (ili magnetna indukcija ili gustina magnetnog fluksa, zavisi gde se nalazite i ko vas pita, prilog A).

Pre uvođenja internacionalnog sistema jedinica, jedinica za magnetno polje *B* je bila gauss sa oznakom Gs.

Odlukom Međunarodne elektrotehničke komisije (*IEC - International Electrotechnical Commission*) iz 1956. godine, i odlukom Generalne konferencije za tegove i mere (*CGPM - Conférence Générale des Poids et Mesures*) iz 1960. godine, jedinica je dobila naziv tesla, sa oznakom T, u čast genijalnog srpskog naučnika Nikole Tesle.



$$[B] = \frac{[F]}{[IL]} = \frac{N}{Am} \quad \boxed{T = \frac{N}{Am}} \quad 1T = 10^4 Gs$$

2. Zakon sile

Najveća vrednost sile koja deluje na provodnik konačne dužine kroz koji protiče stalna struja i koji se nalazi u magnetnom polju upotrebljenja je za definisanje magnetnog polja.

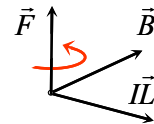
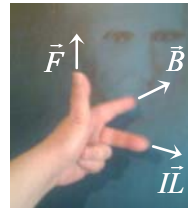
Međutim, sila kao vektorska veličina, je pored intenziteta određena još pravcem i smerom, a biće potpuno određena ako se izraz napiše u obliku vektorskog proizvoda. Tako se dobija i izraz koji je poznat i kao *Laplaceova formula*, a izveden je na osnovu *Ampèreovih* eksperimenata (lekcija 43).

$$F_{\max} = B I L$$

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Pravac i smer sile moguće je odrediti i pomoću pravila leve ruke koje je poznato i kao *Flemingovo* pravilo ili *FBI* pravilo. Kako se ovde radi o vektorskom proizvodu prirodno je primeniti pravilo desne ruke ili desne zavojnice. Oba pravila dovode do istog rezultata. Ako se umesto leve ruke upotrebi desna, tada srednji prst pokazuje pravac kretanja elektrona koji je, kao što je poznato, suprotan konvencijom usvojenom smeru struje.

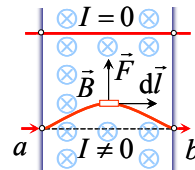


Na prav provodnik konačne dužine u homogenom magnetnom polju deluje sila

$$\vec{F} = I \left(\int_a^b d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

gde vektor dužine ima pravac i smer toka struje.

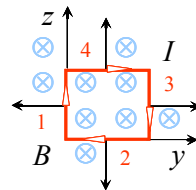
- Magnetna sila na zatvorenu strujnu konturu je jednaka nuli. Niz diferencijalnih dužina obrazuje zatvoreni poligon i njihov vektorski zbir je nula.



$$\oint_C d\vec{l} = 0$$

Pravougaona strujna kontura nalazi se u homogenom polju $\vec{B} = -B\hat{x}$ koja je normalna na površ koju kontura ograničava. Na stranice 1÷4 deluju sile

$$\left. \begin{array}{l} d\vec{F}_1 = -IB dz \hat{y}, \quad d\vec{F}_2 = -IB dy \hat{z}, \\ d\vec{F}_3 = IB dz \hat{y}, \quad d\vec{F}_4 = IB dy \hat{z}. \end{array} \right\} \rightarrow \vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$$



Kao što je i očekivano, ukupna sila na strujnu konturu je jednaka nuli. Ako kontura nije deformabilna ukupni rad sila polja biće jednak nuli.

3. Moment sila na strujnu konturu

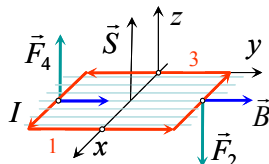
Pravougaona strujna kontura se nalazi u homogenom polju u ravni $z=0$ koja je paralelna sa pravcem polja, $\vec{B} = B\hat{y}$. Sada na stranice dužine b koje su paralelne sa y -osom ne deluju magnetne sile jer su strujni elementi paralelni i anti-paralelni sa pravcem polja. Na drugi par stranica čije su dužine a deluju sile istih pravca i intenziteta ali suprotnih smerova.

$$\vec{F}_1 = (Ib\hat{y}) \times (B\hat{y}) = \vec{0},$$

$$\vec{F}_3 = (-Ib\hat{y}) \times (B\hat{y}) = \vec{0},$$

$$\vec{F}_2 = (-Ia\hat{x}) \times (B\hat{y}) = -IaB\hat{z},$$

$$\vec{F}_4 = (Ia\hat{x}) \times (B\hat{y}) = IaB\hat{z}.$$



Kao što je i očekivano, ukupna sila na ovu zatvorenu konturu je jednaka nuli.

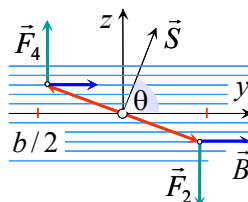
$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

Međutim, i pored toga što ukupna sila na konturu ne postoji, sile koje su različite od nule, a to su $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_4$, proizvode moment koji prouzrokuje obrtanje konture oko x -ose. Ovaj moment, po pravilu desne zavojnice, imaće smer suprotan od smera x -ose, što znači da je obrtanje konture u smeru kazaljki na satu. U odnosu na osu obrtanja moment će biti

$$\vec{T} = \frac{b}{2}\hat{y} \times \vec{F}_1 + \left(-\frac{b}{2}\hat{y}\right) \times \vec{F}_3 = \frac{b}{2}\hat{y} \times (-IaB\hat{z}) + \left(-\frac{b}{2}\hat{y}\right) \times (IaB\hat{z}) = -IabB\hat{x}.$$

U opštem slučaju kontura se nalazi pod nekim uglom u odnosu na vektor polja. Tada su kraci sila koja čine spreg

$$\vec{d}_2 = \frac{b}{2}(\sin\theta\hat{y} - \cos\theta\hat{z}) = -\vec{d}_4.$$



Moment sila koji teži da obrne konturu je sada

$$\vec{T} = \vec{d}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{d}_4 \times \vec{F}_4 = 2\vec{d}_2 \times \vec{F}_2 = -IabB \sin\theta \hat{x} = -ISB \sin\theta \hat{x},$$

gde je $S = ab$ površina strujne konture. Međutim, površina je vektor čiji je pravac normalan na ravan u kojoj leži kontura i čiji je smer određen pravilom desne zavojnice, tj. smerom obilaska po konturi, a to je smer struje kroz konturu. Pošto vektori površine i magnetnog polja grade ugao θ , za moment sila konačno može da se napiše

$$\boxed{\vec{T} = I\vec{S} \times \vec{B}} \quad \text{ili} \quad \boxed{\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}} \quad \text{gde je} \quad \boxed{\vec{m} = I\vec{S}} \quad \text{i} \quad \boxed{[m] = \text{Am}^2}$$

gde je $\vec{m}$ magnetni dipolni moment ili (amperski) magnetni moment.

4. Magnetni dipol

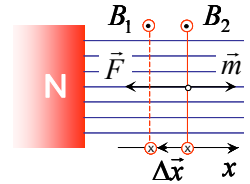
Kad je kontura postavljena tako da je vektor površine koju kontura gradi kolinearan sa vektorom polja, na konturu ne deluje moment sila, kontura se nalazi u položaju stabilne ravnoteže i ima minimalu potencijalnu energiju. Kad su ovi vektori suprotnih smerova kontura ima maksimalnu potencijalnu energiju i nalazi se u položaju labilne ravnoteže. Potencijalna energija se pretvara u rad koji se vrši na obrtanju konture od proizvoljnog položaja do referentnog položaja.

$$-W = A = \int_{\theta}^{\theta_0} T d\theta = \int_{\theta}^{\theta_0} mB \sin \theta d\theta = -mB(\cos \theta_0 - \cos \theta) = -A_0 + A$$

Kao što se uvek čini, za referentni položaj treba odabrati položaj u kome je potencijalna energija jednaka nuli, tj treba smatrati da nema pethodno uloženog rada.

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \pi/2, \quad A_0 = 0 \\ W &= -mB \cos \theta \\ W &= -\vec{m} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

U homogenom magnetnom polju ukupna sila na zatvorenu strujnu konturu je jednaka nuli. U nehomogenom polju će se pojaviti sila koja deluje na konturu. Neka se kontura nalazi u polju stalnog magneta čije polje opada sa rastojanjem, a smer struje je takav da je sila privlačna. Sada je

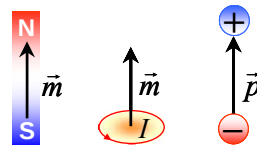


$$\Delta A = F \Delta x = -\Delta W = m \Delta B = m(B_2 - B_1) = (B(x + \Delta x) - B(x))$$

$$F = m \frac{B(x + \Delta x) - B(x)}{\Delta x} \quad \triangleright \quad F = m \frac{dB}{dx} = \frac{d}{dx}(\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad \triangleright \quad \vec{F} = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

Dipol	magnetni	električni
Moment	$\vec{m} = I\vec{S}$	$\vec{p} = q\vec{d}$
Moment sila	$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$	$\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$
Energija	$W = -\vec{m} \cdot \vec{B}$	$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$
Sila	$\vec{F} = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B})$	$\vec{F} = \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E})$

Gilbertov model
Ampèreov model
Električni dipol



Niz analogija sa električnim dipolom koje se uočavaju su razlog što su prvi fizičari govorili o pozitivnim i negativnim magnetnim opterećenjima (severni i južni pol) i što su razvili celu magnetostatiku kao savršenu analogiju sa elektrostatikom. Međutim, to je bio pogrešan model, jer ne postoji nešto poput izolovanog magnetnog pola. Magnetizam potiče od naelektrisanja u kretanju. Strujna kontura je magnetni dipol.

5. Magnetni dipolni moment

Izraz za magnetni dipolni moment strujne konture može da se uopšti korišćenjem formule za površinu zatvorene konture. Izraz se izvodi iz Stokesove teoreme pogodnim izborom podintegralne funkcije.

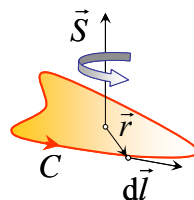
$$\vec{a} = -y \hat{x} + x \hat{y}, \quad d\vec{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y}, \quad \vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$$

$$\text{rot } \vec{a} = 2 \hat{z}, \quad \vec{a} d\vec{l} = -y dx + x dy, \quad \vec{a} d\vec{l} = |\vec{r} \times d\vec{l}|$$

$$\oint_C \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{a} d\vec{S}$$

 $\triangleright$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times d\vec{l}$$



Odavde se dobija opšta formula za magnetni moment strujne konture proizvoljnog oblika.

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times I d\vec{l}$$

Kad se izraz za jačinu struje zameni gustinom naelektrisanja dobija se opšta formula za magnetni moment koncentrisanog naelektrisanja koje obilazi po konturi.

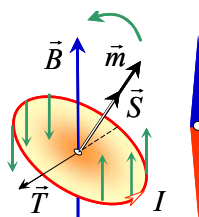
$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times I d\vec{l} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \rho \vec{v} dV$$

 $\triangleright$

$$\vec{m} = \frac{q}{2} \vec{r} \times \vec{v}$$

Izolovani strujni element nije moguće napraviti i elementarna strujna kontura je praktično jedini element za proučavanje magnetnog polja.

Ako se u magnetno polje unese probna strujna kontura, tj. kontura koja je kruta, ravna, malih dimenzija i koja može slobodno da se okreće, javlja se moment sila koji konturu dovodi u ravnotežni položaj. U ravnotežnom položaju, kad je moment sila jednak nuli, normala na površinu konture definiše pravac magnetnog polja.



To je pravac koji bi zauzela slobodno obešena magnetna igla (igla kompasa) uneta u istu tačku polja.

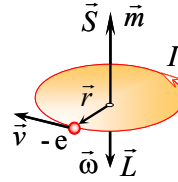
Promena magnetnog momenta strujne konture dovodi do promene ukupnog maksimalnog momenta tako da je njihov količnik za neku tačku u polju uvek konstantan i isti za sve probne strujne konture.

Odavde ponovo sledi jedinica za magnetno polje.

$$T_{\max} = ISB = mB, \quad B = \frac{T_{\max}}{m}, \quad [B] = \frac{\text{Nm}}{\text{Am}^2} = \text{T}.$$

6. Orbitalni magnetni moment elektrona

• Elektron kruži po orbiti poluprečnika r ugaonom brzinom ω i stvara kovekcionu struju jačine I koja je suprotnog smera od smera kretanja elektrona. Magnetni dipolni moment elektrona, nazvan i orbitalni magnetni moment $\vec{m}$, se dobija iz izraza za dipolni moment čestice.



Treba uočiti da su vektori položaja i brzine međusobno normalni vektori, pa je $\vec{r} \times \vec{v} = -r v \hat{S}$.



$$\vec{m} = -\frac{e}{2} \vec{r} \times \vec{v}$$

Do istog rezultata se dolazi i iz osnovne definicije.

$$I = \frac{|-e|}{T} = \frac{ev}{2\pi r}, \quad S = r^2 \pi, \quad \vec{m} = I \vec{S} \quad \triangleright \quad \vec{m} = \frac{e}{2} r v \hat{S}$$

Orbitalni magnetni moment se često izražava preko ugaone brzine.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\omega} = \frac{1}{r^2} (\vec{r} \times \vec{v}) \quad \triangleright \quad \vec{m} = -\frac{e}{2} r^2 \vec{\omega}$$

U razmatranje treba uvesti ugaoni moment ili moment impulsa L , tako što se uključe masa elektrona i njegov moment inercije I_ω . Tako se dobija veza između ova dva momenta.

$$\vec{L} = I_\omega \vec{\omega}, \quad \vec{L} = \vec{r} \times m_e \vec{v} \quad \triangleright \quad \vec{m} = \frac{-e}{2m_e} \vec{L}$$

• U prethodnom razmatranju elektron je moguće zameniti telom čije su dimenzije znatno manje od poluprečnika orbite (tačkasto naelektrisanje i tačkasta masa). Neka je to telo naelektrisano količinom naelektrisanja q i neka ima masu m_t . Sve izvedene formule ostaju u važnosti.

$\vec{m} = \frac{q}{2} r^2 \vec{\omega}$	$\vec{L} = r^2 m_t \vec{\omega}$	$\vec{m} = \frac{q}{2m_t} \vec{L}$	$\vec{m} = \gamma \vec{L}$	$\gamma = \frac{q}{2m_t}$
--	----------------------------------	------------------------------------	----------------------------	---------------------------

Veličina γ je žiromagnetni odnos i ne zavisi od ugaone brzine ili poluprečnika konture. Izgleda čudno što ovaj odnos postoji čak i ako nema rotacije. Međutim, u tom slučaju su oba momenta jednaka nuli, pa je ovaj količnik zapravo granična vrednost. Dalje, žiromagnetni odnos je moguće primeniti na bilo koju kružnu konturu, a to znači i na bilo koje rotirajuće telo, kao što su cilindar ili sfera, koje se može predstaviti nizom kružnih strujnih kontura. Sva takva tela imaju isti žiromagnetni odnos i to važi sve dok se nalazimo u okvirima klasične mehanike i dok su masa i naelektrisanje uniformno raspoređeni. Pokušaj da se na ovaj način izračuna magnetni moment elektrona usled obrtanja oko sopstvene ose dovešće do netačnih rezultata.

7. Magnetni moment kružne konture

Kružna kontura, mase m_t i poluprečnika $r = a$, koja je naelektrisana količinom naelektrisanja q , rotira oko ose ugaonom brzinom ω . Naelektrisanje i masa su ravnomerno raspoređeni po obimu konture. Izraz za magnetni (dipolni) moment može da se izvede dvojako. Pomoću definicije magnetnog momenta i pomoću magnetnog momenta naelektrisane čestice, pri čemu se kontura deli na niz elementarnih odečaka.



$$m = I S = \frac{q}{T} S = \frac{q v}{2\pi a} a^2 \pi = \frac{q}{2} v a = \frac{q}{2} a^2 \omega$$



$$\vec{m} = \int d\vec{m} = \frac{1}{2} a^2 \vec{\omega} \int dq = \frac{1}{2} a^2 \vec{\omega} \int_0^{2\pi} q' a d\theta = \frac{1}{2} a^3 \vec{\omega} \frac{q}{2a\pi} 2\pi = \frac{q}{2} a^2 \vec{\omega}$$

Na oba načina se dobija isti rezultat kao i za naelektrisanu česticu. Šta više, iz dobro poznatog izraza za moment inercije sledi i da je žiromagnetni odnos isti.

8. Magnetni dipolni moment kružne ploče

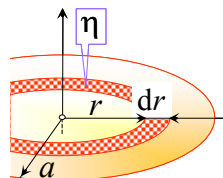
Neprovodan disk, mase m_t i poluprečnika a naelektrisan je stalnom površinskom gustinom naelektrisanja η . Disk rotira oko svoje ose stalnom ugaonom brzinom ω .

Podelimo disk na koncentrične prstenove. Svaki prsten predstavlja elementarnu strujnu konturu.

Svaka od strujnih kontura proizvodi elementarni magnetni dipolni moment.

Količina naelektrisanja na svakom prstenu je srazmerna površini tog prstena.

Zbir svih elementarnih momenata daje ukupni moment. U konačnom izrazu površinska gustina naelektrisanja zamenjuje se ukupnom količinom naelektrisanja $\eta = q/(a^2\pi)$. Smer obrtanja konture se ne naznačuje posebno, jer su pravac i smer magnetnog dipolnog momenta isti kao pravac i smer vektora ugaone brzine. Ako je masa diska m_t iz poznatog izraza za moment inercije se dobija angularni moment. Žiromagnetni odnos je isti kao i ranije.



$$d\vec{m} = \frac{dq}{2} r^2 \vec{\omega}$$

$$dq = \eta dS = \eta 2\pi r dr$$

$$\vec{m} = \eta \pi \vec{\omega} \int_0^a r^3 dr$$

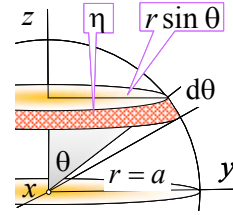
$$\vec{m} = \frac{1}{4} \eta \pi \vec{\omega} a^4$$

$$\vec{m} = \frac{q}{4} a^2 \vec{\omega} = \gamma \vec{L}$$

$$\vec{L} = I_{\omega} \vec{\omega} = \frac{1}{2} m_t a^2 \vec{\omega}$$

9. Magnetni moment sferne ljuske

Sferna ljuska pluprečnika a uniformno je naelektrisana površinskom gustinom naelektrisanja η . Ljuskę treba podeliti na niz kružnih prstenova tako da je osa rotacije njihova zajednička osa. Svaki prsten nosi elementarnu struju koja je srazmerna površini prstena i zato zavisi od polarnog ugla $0 \leq \theta \leq \pi$.



$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} dq = \frac{\omega}{2\pi} \eta dS = \frac{\omega}{2\pi} \eta (2\pi r \sin \theta) r d\theta$$

$$dm = dI S = \frac{\omega}{2\pi} \eta (2\pi r \sin \theta) r \pi (r \sin \theta)^2 d\theta = \omega \eta \pi r^4 \sin^3 \theta d\theta$$

$$\vec{m} = \frac{4}{3} \vec{\omega} \eta \pi r^4 = \frac{q}{3} a^2 \vec{\omega} = \frac{q}{2m_t} \frac{2}{3} m_t a^2 \vec{\omega} = \frac{q}{2m_t} I_{\omega} \vec{\omega} = \frac{q}{2m_t} \vec{L} = \gamma \vec{L}$$

10. Magnetni moment masivne sfere

Problem zapreminski raspodeljenog sfernog rotirajućeg naelektrisanja (lopta) najlakše je rešavati u sfernom koordinatnom sistemu. Između *Descartesovih* i sfernih koordinata postoje veze koje su ovde navedene jer u literaturi postoje različita označavanja. Za usvojeni koordinatni sistem je

$$\begin{aligned} dl_r &= dr, & dl_{\phi} &= r \sin \theta d\phi, & dl_{\theta} &= r d\theta, \\ 0 \leq t \leq a, & & 0 \leq \phi \leq 2\pi, & & 0 \leq \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

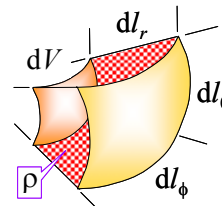
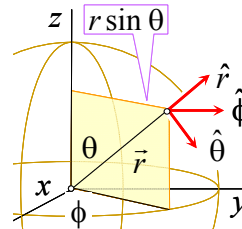
Po ugaonoj koordinati ϕ može odmah da se integriřali i zapremina jednog elementarnog prstena je

$$dV = dl_{\phi} dl_{\theta} dl_r = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr.$$

Površine poprečnih preseka lopte su

$$S = (r \sin \theta)^2 \pi$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \sin \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$



Loptu je moguće predstaviti kao niz elementarnih strujnih kontura sa zajedničkom osom simetrije. Svaka strujna kontura je zapravo prsten poluprečnika $r \sin \theta$ kojim je ograničena površina S i koji zauzima zapreminu V .

Ako lopta rotira stalnom ugaonom brzinom ω , količina naelektrisanja u jednom elementarnom prstenu stvara elementarnu struju i magnetni dipolni moment.

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \rho dV = \frac{\omega}{2\pi} \rho 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr$$

$$dm = dI S = \frac{\omega}{2\pi} \rho 2\pi r^2 \sin \theta (r \sin \theta)^2 \pi d\theta dr = \omega \rho \pi r^4 \sin^3 \theta d\theta dr$$

Integracijom po zapremini (lopta) koju naelektrisanja zauzimaju, dobija se magnetni moment.

$$\vec{m} = \omega \rho \pi \int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{15} \omega \rho \pi a^5 = \frac{q}{5} a^2 \vec{\omega}$$

Kao i do sada, u razmatranje se uvodi masa tela m_l koja je (kao i naelektrisanje) homogeno raspoređena. Iz poznatog izraza za moment inercije se ponovo dobija isti izraz za žiromagnetni odnos.

Magnetni i ugaoni momenti rotirajućih naelektrisanja, $\gamma = q/2m_l$			
Kružni obruč	Kružna ploča	Šuplja lopta	Puna lopta
$\vec{m} = \frac{q}{2} a^2 \vec{\omega}$	$\vec{m} = \frac{q}{4} a^2 \vec{\omega}$	$\vec{m} = \frac{q}{3} a^2 \vec{\omega}$	$\vec{m} = \frac{q}{5} a^2 \vec{\omega}$
$\vec{L} = \frac{2m_l}{2} a^2 \vec{\omega}$	$\vec{L} = \frac{2m_l}{4} a^2 \vec{\omega}$	$\vec{L} = \frac{2m_l}{3} a^2 \vec{\omega}$	$\vec{L} = \frac{2m_l}{5} a^2 \vec{\omega}$

U klasičnoj teoriji elektron se predstavlja loptastim oblikom. Ugaoni moment elektrona potiče od dve rotacije. Rotacija elektrona oko jezgra stvara orbitalni magnetni moment. Eksperimentalno je primećeno (*Stern–Gerlach*ev eksperiment) da svi elektroni u nehomogenom magnetnom polju ne skreću podjednako. To je dovelo do zaključka da osim orbitalnog magnetnog momenta postoji još neki magnetni moment. Taj magnetni moment potiče od obrtanja (Eng. *spin* - zavrteti) elektrona oko sopstvene ose. Oba magnetna momenta bi trebalo da su određena istom formulom jer je žiromagnetni odnos isti. U toj formuli bi ugaoni moment bio ugaoni moment spina, orbitalni ugaoni moment ili ukupni (vektorski zbir) ugaoni moment. Međutim, eksperimenti su pokazali da je magnetni moment spina dva puta veći od očekivanog i klasičnu teoriju je bilo potrebno korigovati.

Kao faktor korekcije uveden je g -faktor, koji prema vrsti rotacije uzima vrednosti jedan ili dva.

$$\vec{m}_e = g \frac{-e}{2m_e} \vec{L}$$

Oba ugaona momenta i posledično magnetna dipolna momenta su kvantne veličine i dalja razmatranja zalaze u oblast kvantne mehanike.

11. Elektromagnetna ili Lorentzova sila

Jačina struje je skalarni proizvod vektora gustine struje i površine, a zapremina je skalarni proizvod dužine i površine. Tako se dobija magnetna sila koja deluje na naelektrisanja u kretanju koja su zarobljena u zapremini. Gustina struje je direktno proporcionalna srednjoj brzini kretanja nosilaca naelektrisanja. Odatle sledi izraz za magnetnu silu koja deluje na zapreminski rapodeljeno naelektrisanje u kretanju.

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$I = \vec{J} \vec{S}$$

$$dV = \vec{S} d\vec{l}$$

$$d\vec{F} = \vec{J} dV \times \vec{B}$$

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

$$d\vec{F} = \rho \vec{v} dV \times \vec{B}$$

Odavde sledi konačni izraz za magnetnu silu koja deluje na naelektrisanu česticu u kretanju.

$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B}$$

U opštem slučaju na naelektrisanje pored magnetne sile deluje i sila električnog porekla.

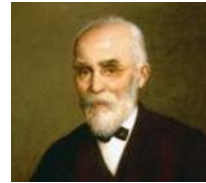
$$d\vec{F} = dq (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Elektromagnetna sila

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

F_e  F_m
 Električna sila Magnetna sila

Izraz je poznat kao
Lorentzova sila,
po nobelovcu
Hedrik Lorentzu



Međutim, *Heaviside* je modernu vektorsku notaciju i analizu, koju je izumeo, primenio na *Maxwellove* jednačine i više godine pre *Lorentza*, oko 1887. godine, došao do rezultata. Njemu dugujemo i veliki broj naziva u elektrotehnici (impedansa, permeabilnost, relukranca i drugo).



Prva proučavanja delovanja magnetnog polja na naelektrisana tela i čestice je izveo nobelovac *J.J. Thompson* prilikom eksperimentisanja sa katodnim zracima. Njegov izraz za silu je bio kvalitativno tačan ali je davao dvostruko manju silu.



U to vreme za subatomske čestice se nije znalo. Dok je eksperimentisao *Thomson* je 1897. godine identifikovao subatomsku česticu koju je *Stoney* predvideo još 1891. godine i koju je nazvao elektron.



Magnetne sile ne vrše rad na pomeranju naelektrisanja.



$$dA = \vec{F}_m d\vec{l} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \vec{v} dt = 0$$

12. Elektromagnetna sila i *Hallov* efekat

Prvo je primećeno da na provodnik kroz koji protiče električna struja i koji se nalazi u okolini stalnog magneta deluje sila koja je nazvana magnetna sila. To su prvi *Ampère*ovi eksperimenti. Kasnije je istraživanje prošireno na uzajamno dejstvo dve električne struje (lekcija 30).

Električna struja je kretanje nosilaca naelektrisanja, pa je očigledno da je sila koja deluje na provodnik samo integralni zapis sile koja deluje na svako pojedinačno naelektrisanje.

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \rho V \vec{v} \times \vec{B} = \vec{J} V \times \vec{B} = \vec{J} \vec{S} \vec{L} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

Kad se provodnik kreće u magnetnom polju sa njim se kreću i slobodna naelektrisanja i na svako od njih deluje magnetna sila. To dovodi do nagomilavanja naelektrisanja na krajevima provodnika. Ova činjenica je zapravo osnova elektromagnetne indukcije (lekcija 77). Ova naelektrisanja stvorice električno polje i električnu silu koja je istog pravca ali suprotnog smera od magnetne sile. Jednog trenutka nastupiće ravnoteža.

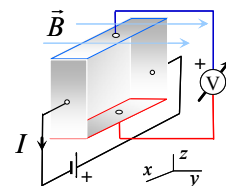
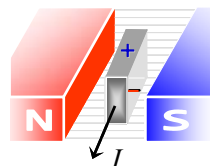
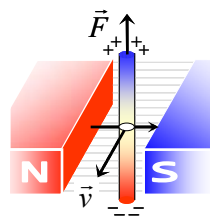
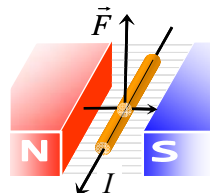
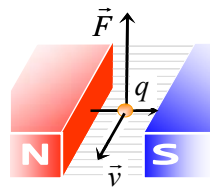
Do potpuno iste pojave dolazi i kad kroz nepokretan provodnik protiče električna struja. Pojava potencijalne razlike između stranica koje nisu čione ni za struju ni za polje, je poznata kao *Hallov* efekat.

U ravnotežnom stanju elektromagnetna sila na nosioce naelektrisanja u metalnoj pločici dimenzija $x \times y \times z$ je jednaka nuli, odakle sledi da je

$$E = -vB = -\frac{JB}{\rho} = -\frac{1}{N'q} \frac{IB}{yz}, \quad U = Ez = -\frac{IB}{N'qy},$$

gde je N' koncentracija nosilaca naelektrisanja.

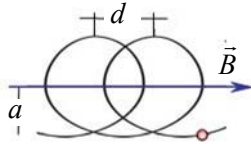
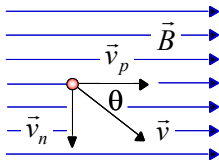
Kad su nosioci naelektrisanja elektroni, njihova brzina je suprotnog smera od pretpostavljenog, ali je i naelektrisanje suprotnog znaka pa je efekat potpuno isti. Kad elektroni nisu potpuno slobodni, kao kod bivalentnih metala, *Hallov* efekat nije moguće objasniti na ovaj način.



13. Naelektrisana čestica u homogenom magnetnom polju

Neka naelektrisana čestica, q , u polje uleće brzinom, v , pod nekim uglom, θ , u odnosu na pravac vektora magnetnog polja, B . Brzina ima komponentu koja je normalna na pravac polja, $v_n = v \sin \theta$, i komponentu koja je sa pravcem polja paralelna, $v_p = v \cos \theta$. Lorentzova sila deluje na naelektrisanu česticu samo usled postojanja normalne komponente brzine povijajući putanju u kružnicu poluprečnika r . Međutim, usled postojanja paralelne komponente brzine čestica se uniformno kreće u pravcu te komponente. To znači da se čestica kreće po kružnoj spiralnoj putanji.

Lorentzova sila je u ravnoteži sa centrifugalnom silom, pa se odatle dobija poluprečnik spirale, a . Vreme T koje je potrebno da čestica obiđe pun krug poluprečnika a i da pređe put d u pravcu paralelne komponente brzine je isto. Tako se dobija korak spirale d .



$$\frac{mv^2}{a} = qv_n B$$

$$T = \frac{2\pi a}{v_n} = \frac{d}{v_p}$$

$$a = \frac{m}{q} \frac{v}{B} \sin \theta$$

$$d = 2\pi \frac{m}{q} \frac{v}{B} \cos \theta$$

Ako naelektrisana čestica u polje uleće paralelno sa pravcem magnetnog polja, na nju magnetno polje nema nikakvo dejstvo i čestica nastavlja da se istom brzinom kreće pravolinijski.

U specijalnom slučaju, kad čestica uleti u stalno polje po uglom koji je normalan na pravac polja, $\theta = \pi/2$, kretanje čestice se nastavlja po kružnoj putanji čiji poluprečnik zavisi samo od početne brzine. Čestica tada postaje zarobljenik magnetnog polja. Vreme obilaska po kružnoj putanji ne zavisi od brzine. Na jednom uspostavljenu kružnu putanju moguće je uticati samo promenom jačine magnetnog polja.

$$a = \frac{v}{\omega} = \frac{m}{q} \frac{v}{B}, \quad \omega = \frac{qB}{m}, \quad T = \frac{2\pi a}{v}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{q}{m} B, \quad f = \frac{\gamma}{\pi} B.$$

U Zemljinom magnetnom polju u Srbiji je $T \approx 20 \mu\text{T}$ i $f \approx 0.5 \text{ MHz}$, pa bi elektron za jedan sekund obišao više od pola miliona punih krugova.

14. Elektron u ukrštenom elektromagnetnom polju

Pod uticajem električnog polja sa katode prema anodi polazi elektron brzinom

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$

koja je u početnom trenutku, jednaka nuli, tj.

$$x = y = z = 0 \text{ i } v_x = v_y = v_z = 0 \text{ za } t = 0$$

Između ravnih elektroda postoji homogeno magnetno polje koje je upravno na pravac električnog polja, pa na elektron deluje elektromagnetna sila odakle se dobija jednačina kretanja.

$$q = -e$$

$$\vec{E} = -E \hat{z}$$

$$\vec{B} = B \hat{x}$$

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

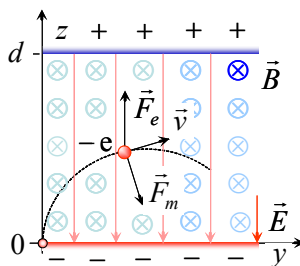
$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$eBv_z \hat{y} - eBv_y \hat{z} + eE \hat{z} = m \frac{dv_y}{dt} \hat{y} + m \frac{dv_z}{dt} \hat{z}$$

Tako se dobijaju dve skalarne diferencijalne jednačine,

$$\frac{dv_y}{dt} = \omega v_z \text{ ili } \frac{dv_y}{dt} = \omega \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \omega \left(\frac{E}{B} - v_y \right),$$



u kojima je upotrebljena oznaka $\omega = eB/m$. Ova veličina je dimenziono učestanost i naziva se frekvencija ciklotrona. Bez stranog električnog polja čestica bi sa tom učestanošću obrtala po krugu (lekcija 13).

Nakon jedne integracije iz prve diferencijalne jednačine se dobija brzina čestice u y -pravcu. Iz početnih uslova se dobija i konstanta integracije. Kad se dobijeno rešenje uvrsti u drugu diferencijalnu jednačinu sledi jednačina kretanja čestice u pravcu z -ose.

$$v_y = \omega z + C_1$$

$$C_1 = 0$$

$$v_y = \omega z$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = \omega \frac{E}{B}$$

Dobijena diferencijalna jednačina je drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Ova diferencijalna jednačina rešava se *Lagrangeovim* metodom varijacije konstanti i sastoji se iz opšteg rešenja (rešenje homogene diferencijalne jednačine) i partikularnog integrala (koji se dobija varijacijom konstanti). Tako se dobija da je

$$z = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{\omega B}$$

Konstante integracije $C_1 = -E/(\omega B)$ i $C_2 = 0$ se dobijaju iz početnih uslova. Ako se uvede oznaka $a = E/(\omega B)$, konačno je

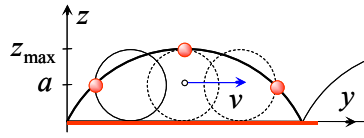
$$z = a(1 - \cos \omega t) \quad \triangleright \quad v_z = a\omega \sin \omega t.$$

$$v_y = \omega z = a\omega (1 - \cos \omega t) \quad \triangleright \quad y = a(\omega t - \sin \omega t)$$

Jednačine kretanja po y i z pravcu su parametarske jednačine cikloide. Eliminacijom trigonometrijskih funkcija iz jednačina kretanja se dobija jednačina kružnice poluprečnika a čiji centar je u trenutku t u tački $O(0, a\omega t, a)$ i kreće se brzinom v .

$$(y - a\omega t)^2 + (z - a)^2 = a^2$$

$$\omega = \frac{eB}{m}, \quad a = \frac{E}{\omega B}, \quad v = \omega R = \frac{E}{B}$$



Čestica koja se u svakom trenutku nalazi na kružnici globalno kretanje čini po pravcu koji je normalan na pravce oba polja.

Brzina elektrona prema anodi, osim u trenutku $t = 0$, je jednaka nuli kad je $\omega t = 2\pi$. Slično ($\omega t = \pi$) se dobija i najveće udaljenje elektrona od katode.

$$z_{\max} = \frac{2mE}{eB^2} = 2a$$

$$U_c = \frac{e}{2m} B^2 d^2$$

$$B_c = \sqrt{\frac{2mU}{ed^2}}$$

Ako je rastojanje između elektroda, d , veće od maksimalnog rastojanja, $d > z_{\max}$, koje elektron može da dostigne, ni jedan elektron neće dospeti do anode i kroz diodni sistem neće proticati konvekciona struja.

U suprotnom slučaju, $d < z_{\max}$, svi elektroni dospevaju do anode i formiraju konvekcionu struju koja u tom slučaju ima i najveću jačinu. Dakle, struja ili ne protiče ili protiče kroz diodu.

Iz graničnog (kritičnog) slučaja ($d = z_{\max}$, $U_c = Ed$) dobijaju se kritične vrednosti za međuelektrodni napon, U_c , i jačinu magnetnog polja, B_c . Kontrolom napona i/ili jačine magnetnog polja uspostavlja se prekidački režim koji je osnova za mnoge primene u elektronici i elektrotehnici uopšte.

J.J. Thompson je 1897. godine merio odnos naelektrisanja i mase katodnih zraka (ustvari snopa elektrona). Prvo je puštao zrake kroz ukršteno električno i magnetno polje i podešavao jačinu električnog polja dok skretanje zraka nije bilo jednako nuli. Zatim je isključio električno polje i merio poluprečnik skretanja zraka. Tako se rodio elektron.

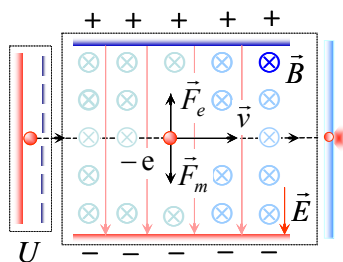
15. Thompsonov eksperiment i maseni spektrometar

Elektroni emitovani sa katode dobijaju ubrzanje prema anodi koja se nalazi na potencijalu U . Povećanje kinetičke energije elektrona jednako je uloženom (negativnom) radu, pa se odatle određuje brzina elektrona nakon prolaza kroz rešetkastu anodu.

$$\frac{mv^2}{2} = -(-eU) \quad \triangleright \quad v = \sqrt{\frac{2e}{m}U}$$

Elektron će nastaviti da se kreće pravolinijski kroz ukršteno elektromagnetno polje ako su električna i magnetna sila u ravnoteži.

$$-eE = -evB \quad \triangleright \quad v = \frac{E}{B}$$



Kombinovanjem dva izraza za brzinu dobija se odnos naelektrisanja i mase elektrona. Upravo je to bio prvi deo Thompsonovog eksperimenta.

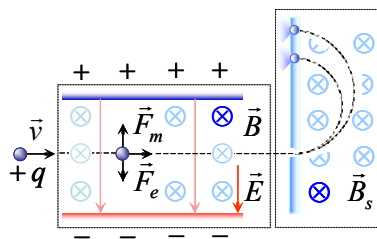
$$\left\| \frac{e}{m} = \frac{1}{2U} \left(\frac{E}{B} \right)^2 \right.$$

U drugom delu eksperimenta naelektrisana čestica (pozitivni jon) prvo prolazi kroz separator brzina. Drugim rečima, na prvom delu putanje jačine električnog i magnetnog polja su tako podešene da čestica ima pravolinijsku putanju i brzinu $v = E/B$. Na drugom delu puta nema električnog polja, a magnetno polje B_s ne menja brzinu čestice (ne vrši rad) već samo povija njenu putanju u kružnu liniju poluprečnika a .

$$\frac{mv^2}{a} = qvB_s \quad \triangleright \quad m = \frac{aqB_s}{v}$$

Pošto iz separatora čestica izlazi sa poznatom brzinom, sledi da je

$$m = \frac{aqBB_s}{E}.$$



Merenjem poluprečnika skretanja čestice moguće je odrediti njenu masu i to je osnova masene spektrometrije. Međutim, počeci masene spektroskopije se vezuju za proučavanje izotopa. Prva otkrića te vrste su izotopi neona. Lawrence je 1939. godine primio Nobelovu nagradu za otkriće *cyclotrona*, a već 1942. godine, u okviru projekta *Manhattan*, je za separaciju izotopa uranijuma upotrebljen njegov maseni spektrometar *Calutron*. Direktor podprojekta *Trinity* (testiranje prve nuklearne eksplozije) je bio *Kenneth Bainbridge* koji je i tvorac spektrometra čiji je princip rada ovde prikazan.

16. Fluks vektora magnetnog polja

Fluks (Lat. *fluxus* - teći) je protok fizičke veličine u jedinici vremena. Matematički, fluks je površinski integral vektorskog polja.

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Fluks vektora magnetnog polja ili magnetni fluks, kroz površinu S koja se oslanja na konturu C , je definisan na isti način, pa je odatle magnetno polje (indukcija) isto što i gustina magnetnog fluksa. Tako je inače definisan fluks bilo koje druge vektorske veličine, na primer, $\vec{v}$, $\vec{E}$, ili $\vec{D}$. Za razliku od flukseva koje stvaraju druge vektorske veličine, magnetnom fluksu je pridružena posebna jedinica. Pre uvođenja internacionalnog sistema jedinica, SI, jedinica za magnetni fluks je bila maksvel, za oznakom Mx.

$[\vec{v}S] = \text{m}^3/\text{s}$	$[ES] = \text{V m}$	$[DS] = \text{C}$	$[BS] = \text{Wb}$
------------------------------------	---------------------	-------------------	--------------------

Jedinica za magnetni fluks je veber, sa oznakom Wb, po nemačkom fizičaru i pronalazaču *Weberu*

$$\text{Wb} = \text{Tm}^2 = \frac{\text{Nm}}{\text{A}} = \text{Vs} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{As}^2},$$

$$1 \text{ Mx} = 1 \text{ Gs} \cdot \text{cm}^2 = 10^{-8} \text{ Wb}$$



Pomoću magnetnog fluksa je neke zakone elektromagnetizma moguće jednostavno matematički formulisati, ali to je i veličina koju je moguće direktno meriti uređajem koji je nazvan fluksmetar (lekcija 82).

17. Zakon o konzervaciji magnetnog fluksa

Fluks vektora magnetnog polja kroz zatvorenu površinu je jednak nuli. Fluksevi kroz sve površine koje se oslanjaju na istu konturu su jednaki.

Gaussov zakon za magnetno polje je četvrta Maxwelllova jednačina

Magnetno polje

- polje je bezizvorno
- linije polja su neprekidne
- polje je solenoidno
- magnetni monopoli ne postoje

B

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

E

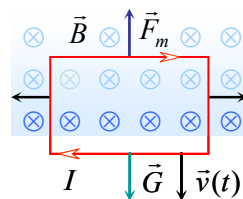
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q / \epsilon_0$$

$$\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

Ovaj zakon je izveden na osnovu velikog broja eksperimenata. Ako magnetni monopoli ikad budu otkriveni i ovaj zakon će biti promenjen.

18. Magnetne sile ne vrše rad?

Pravougaona strujna konura, mase m , optočena je stalnom strujom I . Kontura slobodno visi tako da se samo deo površine nalazi u homogenom magnetnom polju B . Magnetne sile koje deluju na vertikalne stranice konture se međusobno poništavaju.



Pri određenoj jačini struje, magnetna sila koja deluje na horizontalnu stranicu, dužine L koja se nalazi u polju, je u ravnoteži sa gravitacionom silom. To znači da kontura lebdi.

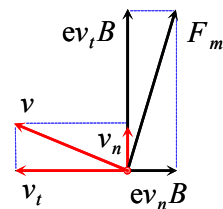
$$F_m = G$$

$$IBL = mg$$

$$I = mg / (BL)$$

Ako se sada jačina struje poveća, ravnoteža se narušava i kontura počinje da se podiže. Znači da se rad vrši. Međutim, znamo da magnetne sile ne vrše rad na pomeranju naelektrisanja (lekcija 11).

Kad kontura počne da se podiže, naelektrisanja u provodniku se više ne kreću horizontalno, već njihova brzina dobija vertikalnu komponentu koja prati podizanje provodnika. Magnetna sila koja je uvek normalna na pravac kretanja naelektrisanja sada dobija horizontalnu komponentu. I dalje ova sila ne vrši rad, a kontura se pomera?



Vertikalna komponenta magnetne sile se nije promenila jer se nije promenila ni jačina struje u stranici na koju sila deluje. Ova sila sada ima i horizontalnu komponentu koja je suprotnog smera od smera kretanja naelektrisanja, te se protivi njihovom kretanju. Znak naelektrisanja je nebitan.

$$F_n = ILB$$

$$qv_t = IL$$

$$F_n = qv_t B$$

$$F_t = qv_n B$$

Kako će biti pokazano u kasnijim izlaganjima magnetno polje se uvek protivi promenama. Ipak, tok naelektrisanja ostaje nepromenjen tj. jačina struje je stalna. Za savladavanje novonastalog otpora izvor električne struje mora da dodatnu energiju pretvori u rad. Naelektrisanja u horizontalnoj stranici konture, koja je pod dejstvom vertikalne sile, su izvršila rad prešavši put dužine L dok se jednovremeno kontura podigla za neko rastojanje h .

$$A = F_t L = (qv_n B) L = (qv_n) B (v_t t) = (qv_t) B (v_n t) = IL B h$$

To je rad za koji bi, bez prethodne analize, bilo optuženo magnetno polje. Rad je izvršen i ovde se ne postavlja pitanje da li se pri pomeranju konture vrši rad, već ko je davalac energije.

Ako magnetno polje ne vrši rad koja je onda svrha postojanja tog polja? U razmatranom primeru magnetno polje preusmerava horizontalnu silu, koja zapravo potiče od električnog polja, u vertikalno kretanje strujne konture. Kad strujna kontura bude cela uvučena u magnetno polje ukupna magnetna sila biće jednaka nuli. U magnetnom polju strujne konture se okreću tako da propuste najveći fluks kroz svoju površinu i na taj način dolaze u položaj u kome je potencijalna energija minimalna. Magnetno polje vodi naelektrisane čestice po tačno određenim putanjama ne menjajući im brzinu.

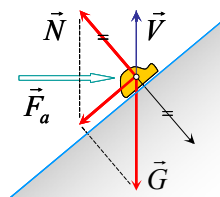
Međutim, problem može da se postavi i na sledeći način. Ako magnetno polje ne vrši rad, onda nema ni energiju, jer energija je sposobnost sistema da vrši rad. I pored toga što ovo razmatranje izgleda savršeno tačno, teško je u to verovati. Sa druge strane, postoje primeri (nehomogena polja) u kojima nije moguće dokazati da magnetno polje ne vrši rad.

Do istog rezultata za rad, iz razmatranog primera, se dolazi i ako se magnetno polje proglasi za vršioca rada. Tako bi moglo da se kaže: Pod uticajem elektromagnetne sile strujna kontura se pomeri bez uticaja nekih drugih sila. U ovakvo razmatranje (i pored toga što je pogrešno) je mnogo lakše poverovati. Pri tom translatorskom pomeranju elementa konture $d\vec{l}$ za elementarni pomeraj $d\vec{h}$ izvrši se elementarni rad,

$$dA = \vec{F} d\vec{h} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) d\vec{h} = I \vec{B} (d\vec{h} \times d\vec{l}) = I \vec{B} d\vec{S} = I d\Phi.$$

Pošto je struja kroz konturu konstantna elementarni rad je direktno srazmeran priraštaju fluksa.

Za bolje razumevanje ovog problema možda može da posluži analogija sa telom na strmoj ravni. Na telo deluju samo dve sile. Sila težine G i sila N koja je reakcija na normalnu komponentu sile težine. Rezultanta sile je tangencijana na ravan tj. ima pravac kojim će telo skliznuti niz ravan.

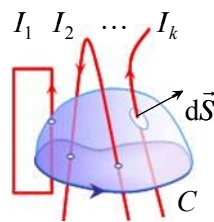


Da bi telo bilo u ravnoteži ili da bi se povuklo uz strmu ravan potrebno je upotrebiti aktivnu silu F_a koja može bude i samo horizontalna. Sila N ne vrši nikakav rad jer je normalna na pravac putanje. Međutim, ova sila ima vertikalnu komponentu V koja ustvari podiže telo i omogućava horizontalnoj aktivnoj sili da telo pomera uz strmu ravan. Horizontalna komponenta sile N je usmerena unazad i nju treba savladati gurajući telo unapred. Očigledno, da horizontalna aktivna sila ne podiže telo. U ovom slučaju vertikalna komponenta sile reakcije ima pasivnu ali presudnu ulogu, kao i magnetno polje u prethodno razmatranom primeru.

19. Ampèreov zakon

Ampèreov zakon daje relaciju između magnetnog polja i struja koje to polje proizvode, a rezultat je istraživanja iz 1826. godine.

Cirkulacija vektora magnetnog polja $\vec{B}$ po proizvoljnoj zatvorenoj konturi C je srazmerna algebarskom zbiru jačina struja koje prolaze kroz proizviljnu površinu $\vec{S}$ koja je ograničena konturom C . Konstanta proporcionalnosti μ_0 je permeabilnost vakuumu ili magnetna konstanta.



Vrednost ove konstante je izračunata, a ne eksperimentalno određena. Od vremena prvih *Ampèreovih* eksperimenata sa dva paralelna provodnika (lekcija 30) do danas, konstanta je više puta menjala vrednost. U dužem periodu, sve do 1948. godine, konstanta je imala čak tri različite vrednosti istovremeno. Vakuum i permeabilnost (Nlat: *Permeabilitas* - propustljivost) su termini koji imaju fizička značenja, pa se zbog načina na koji je ova konstanta određena radije upotrebljava termin magnetna konstanta. Jedinica za konstantu sledi iz *Ampèreovog* zakona, ali se u praksi upotrebljava jedinica: henri po metru (lekcija 88).

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} d\vec{S}$$

$$[\mu_0] = \frac{\text{Tm}}{\text{A}} = \frac{\text{Wb}}{\text{Am}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

Primenom *Stokesove* teoreme se dobija lokalni ili diferencijalni oblik *Ampèreovog* zakona.

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Lako se proverava da je *Ampèreov zakon* tačan za sve magnetostatičke probleme. Međutim, u opštem slučaju postoje dve nesaglašenosti. Prva u vezi sa jednačinom kontinuiteta, a druga u vezi sa prostiranjem elektromagnetnih promena.

Divergencija rotora je nula		Dobija se	Treba da bude
1	$\text{div}(\text{rot } \vec{B}) = \mu_0 \text{div } \vec{J} = 0 \triangleright$	$\text{div } \vec{J} = 0$	$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$
U slobodnom prostoru nema struja		Dobija se	Treba da bude
2	$\vec{J} = \vec{0} \triangleright$	$\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$	$\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Maxwell je 1861. godine, uvodeći struju pomeraja (lekcija 109), zakonu dao savršen oblik. U okvirima statičkih polja, kad su izvodi po vremenu jednaki nuli, osnovni zapis *Ampèreovog* zakona je potpuno tačan. Odavde potiče i pitanje: Da li magnetno polje konzervativno?

20. Polje magnetne sile nije konzervativno?

Sile koje imaju osobinu da je rad na pomeranju mase između dve tačke nezavisan od putanje koja te tačke spaja su konzervativne sile. Posledično, rad konzervativnih sila po zatvorenoj putanji je jednak nuli. Konzervativna sila zavisi samo od položaja objekta u prostoru i tada je svakoj tački u prostoru moguće dodeliti potencijal (potencijalna energija). Gravitaciona i elektrostatička sila (Sveska I) su konzervativne sile. Mehanička energija je zbir energije položaja (potencijalna) i energije kretanja (kinetička). U sistemu u kome deluju samo konzervativne sile, mehanička energija je konstantna. To je princip konzervacije (očuvanja) mehaničke energije. U elastičnim sudarima mehanička energija je očuvana. U neelastičnim sudarima deo mehaničke energije se pretvara u toplotu, ali je ukupna energija očuvana. To je princip očuvanja (ukupne) energije. Polje sile je vektorsko polje bezkontaktnih sila. Sve četiri poznate sile interakcije (gravitaciona, elektromagnetna, jaka nuklearna i slaba nuklearna) su bezkontaktne sile. Polje sile $\vec{F}$ je konzervativno vektorsko polje ako je zadovoljen bar jedan od četiri ekvivalentna uslova (Sveska I).

Po definiciji konzervativnosti, rad sila polja po zatvorenoj putanji je jednak nuli. Sledi da rad ne zavisi od izbora putanje. Iz Stokesove teoreme se dobija lokalni oblik ovog uslova. Oдавde sledi da je konzervativno polje i bezvrtložno polje. Rotor gradijenta je uvek jednak nuli. Iz teoreme o gradijentu sledi da je ovu silu moguće izraziti kao negativan gradijent skalarne funkcije. Integral po proizvoljnoj putanji je integral totalnog diferencijala uvedene skalarne funkcije.

$$1 \quad \oint_C \vec{F} d\vec{l} = 0$$

$$2 \quad \text{rot} \vec{F} = \vec{0}$$

$$3 \quad \vec{F} = -\text{grad } \varphi$$

$$4 \quad \int_{AB} \vec{F} d\vec{l} = \varphi(A) - \varphi(B)$$

Mnoge sile ne čine polje sile (kao na primer sila trenja). U tim slučajevima gornji uslovi nisu matematički ekvivalentni.

- Magnetna sila koja deluje na naelektrisanu česticu u kretanju zavisi i od položaja i od brzine čestice - dakle, nije konzervativna.
- Magnetna sila zadovoljava uslov da je rad sila po zatvorenoj putanji jednak nuli (jer je sila uvek normalna na putanju) - dakle, konzervativna je.
- Magnetnu silu nije moguće izraziti kao degradijent neke skalarne funkcije, a njen rotor nije definisan - dakle, nije konzervativna.

U literaturi ne postoji jedinstven stav o konzervativnosti magnetne sile. Na osnovu svega što je ovde izneto, može se nedvosmisleno zaključiti:

Magnetna sila nije konzervativna.

21. Biot-Savartov zakon

Ponavljajući *Örstedove* eksperimente, *Biot* i *Savart* su još 1820. godine otkrili vezu između jačine stacionarne struje i magnetnog polja.



Jačina magnetnog polja je proporcionalna jačini struje u pravom provodniku i obrnuto je proporcionalna rastojanju od ose.

$$B = k \frac{I}{r}$$



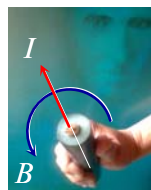
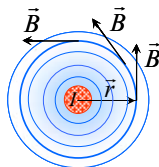
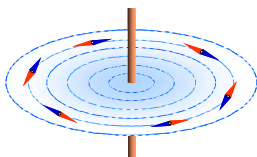
Međutim, istorijski izvori su prilično neodređeni u pogledu otkrića ovog zakona i najčešće se nalazi da je zakon formulisan na osnovu izraza za električno polje koje stvara tačkasto naelektrisanje.

Električno polje	Analogija	Magnetno polje
$dE = k_e \frac{q' dl}{r^2}$	Ono što je tačkasto naelektrisanje u elektrostatici to je strujni element u magnetizmu.	$dB = k_m \frac{I dl}{r^2}$
$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q' dl}{r^2}$	U elektrostatici i magnetizmu konstante sredine su uvek na različitim stranama razlomka.	$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$
Strujni element ima pravac i smer. $I d\vec{l} = \vec{J} \vec{S} d\vec{l} = \vec{J} dV = \rho \vec{v} dV = dq \vec{v}$, ili $I d\vec{l} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = dq \vec{v}$		
$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$	◀ Mirovanje Tačkasto naelektrisanje Kretanje ▶	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq}{r^2} \vec{v} \times \hat{r}$

Eksperimentalno su utvrđeni i pravac i smer polja, i kad se to uzme u obzir sledi izraz za koji se tvrdi da je *Biot-Savartov* zakon.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Matematički zapis zakona (lekcija 43) nastao je nakon završenih istraživanja. Dva naučnika su proučavala pomeranje magnetne igle kompasa u blizini veoma dugog pravolinijskog provodnika.

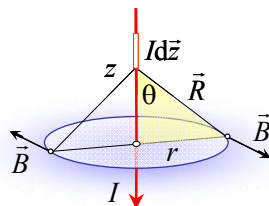


Linije polja vektora magnetnog polja su koncentrični krugovi čiji centri pripadaju osi provodnika. Vektor magnetnog polja je u svakoj tački tangenta na liniju polja. Pravac magnetnog polja je normalan na ravan kojoj pripadaju osa provodnika i tačka u kojoj se polje određuje, a smer se određuje po pravilu desne zavojnice ili pravila desne ruke.

Kroz prav i beskonačno dug provodnik protiče stalna struja jačine I . Provodnik je orijentisan u smeru z -ose, $I d\vec{l} = I d\vec{z}$.

Iz geometrijskog odnosa sledi da je

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \sin \theta = r / R.$$



Primena iskazanog zakona na ovaj slučaj daje

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{z} \times \vec{R}}{R^2} \quad \triangleright \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta}{R^2} dz \quad \triangleright \quad B = \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Kad se integral reši smenom $z = r \tan t$ dobija se formula po kojoj je *Biot-Savartov* zakon poznat.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

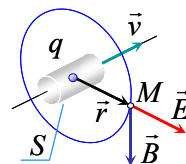
Do istog rezultata, i to znatno jednostavnije, se dolazi i primenom integralnog oblika *Ampèreovog* zakona.

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} d\vec{S} \quad \triangleright \quad B \oint_C dl = \mu_0 I \quad \triangleright \quad B 2r\pi = \mu_0 I \quad \triangleright \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Oba zakona dovode do istog rezultata. Tačnije, radi se o jednom istom zakonu. Kad se krene obrnutim redosledom tj. kad se potraži cirkulacija vektora magnetnog polja i zameni izraz koji je dobijen primenom *Biot-Savartov* zakona, dobija se *Ampèreov* zakon.

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = B \oint_C dl = B 2r\pi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2r\pi = \mu_0 I.$$

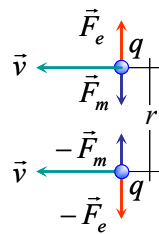
• Tačkasto naelektrisanje koje se kreće, stvara i električno i magnetno polje. Jačine tih polja su najveće kad je vektor koji spaja naelektrisanje i položaj tačke u kojoj se polja računaju normalan na pravac kretanja. Pravci električnog i magnetnog polja su međusobno normalni, a odnos najvećih jačina je



$$\frac{B_{\max}}{E_{\max}} = \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} \frac{4\pi \epsilon_0 r^2}{q} = \epsilon_0 \mu_0 v = \frac{v}{c^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}},$$

gde je c brzina svetlosti u vakuumu (lekcija 108 i Sveska V).

• Jačine polja je zbog različitih jedinica teško porediti. Neka se u tački gde su polja računata nalazi još jedno naelektrisanje istog znaka. Neka se, zbog jednostavnosti u razmatranju, to naelektrisanje kreće paralelno prvom naelektrisanju i to istom brzinom. Na naelektrisanja deluju sile električnog i magnetnog porekla, a njihova razlika je



$$F = F_e - F_m = F_e \left(1 - \frac{F_m}{F_e} \right) = F_e \left(1 - \frac{B_{\max} q v}{q E_{\max}} \right) = F_e \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Magnetno privlačenje biće jednako elektrostatičkom odbijanju jedino ako se čestice kreću brzinom svetlosti.

• Ako se oko naelektrisane čestice u kretanju ili oko strujnog elementa opiše zamišljena površina S oblika valjka tada je fluks vektora magnetnog polja kroz tu površinu jednak nuli jer su u svakoj tački vektori površine i polja međusobno normalni.

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_S \frac{1}{r^2} (d\vec{l} \times \hat{r}) d\vec{S} = 0$$

Ovo je samo dokaz zakona o konzervaciji magnetnog fluksa u ovom specijalnom slučaju.

• Iz *Biot-Savart* zakona sledi da magnetno polje jačine $B = 1\text{T}$ na rastojanju od $r = 1\text{m}$ od ose provodnika proizvodi stalna struja jačine $I = 5\text{MA}$. Tesla, kao i farad, je prevelika jedinica. U elektrotehnici se koriste veličine manjeg reda.

Poreklo	$B [\text{T}]$
Ljudski mozak	10^{-12}
Zemljino magnetno polje	10^{-5}
Krajevi stalnog magneta	10^{-1}
Unutrašnjosti stalnog magneta	10^0
Akceleratori za ubrzanje čestica	10^1
Neutronske zvezde	10^6

• Slično *Gaussovom* zakonu (u elektrostatici) *Ampèreov* zakon je potpuno tačan (za stalne struje) ali nije uvek od velike koristi. Samo u slučajevima kad geometrija problema dozvoljava da se magnetno polje izvuče ispred znaka integrala, *Ampèreov* zakon je najelegantniji metod za rešavanje problema. Kad to nije moguće, treba se vratiti uvek upotrebljivom *Biot-Savartovom* zakonu.

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = B \oint_C dl$$



- strujne niti
- strujni plaštovi
- solenoidi
- torusi

22. Ampère i Biot-Savart

Neka sredina kroz koju protiču nosioci naelektrisanja ima istu magnetnu permeabilnost kao i okolna sredina. Ova pretpostavka je sasvim opravdana. Taj uslov ispunjava snop elektrona u vakuumu i većina materijala koji su provodnici električne struje.

Eksperimentom izveden *Biot-Savartov* zakon ničim ne dopušta da bude primenjen za izračunavanje magnetnog polja u unutrašnjosti provodnika, $r < a$. Međutim, takvu mogućnost pruža *Ampèreov* zakon.

Kroz provodnik kružnog poprečnog preseka poluprečnika a protiče struja gustine $\vec{J}$. Vektori $\vec{B}$ i $d\vec{l}$, i $\vec{J}$ i $d\vec{S}$ su kolinearni.

Kad se *Ampèreov* zakon primeni na kružnu konturu čiji je poluprečnik veći od poluprečnika provodnika, $r \geq a$, dobija se izraz za *Biot-Savartov* zakon.

Međutim, kružnom konturom čiji je poluprečnik manji od poluprečnika provodnika $r \leq a$ nije obuhvaćena ukupna jačina struje.

$$B = \frac{\mu_0 J}{2} r = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{r}{a}\right)^2, & r \leq a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r \geq a \end{cases}$$

Treba primetiti da jačinu magnetnog polja u unutrašnjosti provodnika nije moguće eksperimentalno potvrditi. Na površini diskontinuiteta $r = a$ magnetno polje je neprekidna funkcija.

Magnetno polje ima samo ugaonu komponentu $B = B_\theta(r)$, pa je

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) = \left(\frac{1}{r} B + \frac{\partial B}{\partial r} \right) \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{a^2 \pi} = \begin{cases} \mu_0 \vec{J}, & r \leq a \\ \vec{0}, & r > a \end{cases}.$$

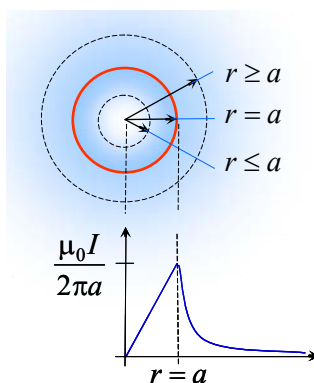
$$J = \begin{cases} \frac{I}{a^2 \pi}, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} d\vec{S}$$

$$B \oint_C dl = \mu_0 \frac{I}{a^2 \pi} \int_S dS$$

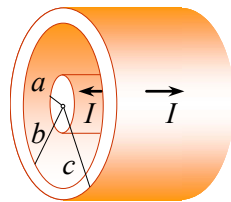
$$B 2r\pi = \mu_0 \frac{I}{a^2 \pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr$$

$$B 2r\pi = \mu_0 \frac{I}{a^2 \pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r dr$$



23. Magnetno polje koaksijalnog voda

Koaksijalni vod kružnog poprečnog preseka se sastoji od unutrašnjeg provodnika poluprečnika a i spoljašnjeg provodnika oblika cevi čiji su unutrašnji i spoljašnji poluprečnici su b i c , respektivno. Kroz provodnike protiču u suprotnim smerovima uniformno raspodeljenje jednosmerne struje čije su gustine J_1 i J_3 .



Zbog cilindrične simetrije problema magnetno polje ima samo ugaonu komponentu $B = B_\theta(r)$ koja ne zavisi od θ i z koordinata.

$$\begin{aligned} J_1 &= I / a^2 \pi \\ J_3 &= I / (c^2 - b^2) \pi \end{aligned}$$

U svim tačkama prostora magnetno polje je određeno *Ampère*ovim zakonom u diferencijalnom obliku, $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, i graničnim uslovima.

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_r & rB_\theta & B_z \end{vmatrix} = \mu_0 \vec{J} \quad \triangleright \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB) = \begin{cases} K_1 = \mu_0 J_1, & 0 \leq r \leq a \\ K_2 = 0, & a \leq r \leq b \\ K_3 = -\mu_0 J_3, & b \leq r \leq c \\ K_4 = 0, & c \leq r < \infty \end{cases}$$

Problem se svodi na rešavanje četiri linearne diferencijalne jednačine prvog reda od kojih svaka odgovara po jednom domenu prostora. Sve diferencijalne jednačine i njihova rešenja su formalno istog oblika,

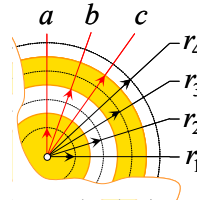
$$r \frac{dB_i}{dr} + B_i = K_i r \quad \triangleright \quad B_i = \frac{1}{2} K_i r + C_i \frac{1}{r}, \quad i = 1, 4,$$

gde su C_i konstante integracije koje treba odrediti iz uslova da je magnetno polje neprekidna i ograničena funkcija.

$B_1(0) = 0$	$\triangleright$	$C_1 = 0$	$\triangleright$	$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{r}{a} \right)^2$
$B_1(a) = B_2(a)$	$\triangleright$	$C_2 = \frac{1}{2} \mu_0 J_1 a^2$	$\triangleright$	$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
$B_2(b) = B_3(b)$	$\triangleright$	$C_3 = \frac{1}{2} \mu_0 (a^2 J_1 + b^2 J_3)$	$\triangleright$	$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$
$B_3(c) = B_4(c)$	$\triangleright$	$C_4 = 0$	$\triangleright$	$B_4 = 0$

- Do istog rezultata se, znatno jednostavnije, dolazi i primenom *Ampère*ovog zakona u integralnom obliku.

Za primenu *Ampèreovog* zakona u integralnom obliku potrebno je zamisliti četiri konture za četiri domena u kojima je potrebno odrediti magnetno polje. U svim slučajevima cirkulacija vektora magnetnog polja je ista (leva strana izraza) dok se algebarski zbir, tom konturom obuhvaćenih, struja menja (desna strana izraza).



$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} d\vec{S} \Rightarrow B \oint_C dl = \mu_0 \int_S J dS \Rightarrow B 2r\pi = \mu_0 \sum J_i S_i$$

Tako se dobija rezultat koji je identičan onom koji se dobija primenom ovog zakona u diferencijalnom obliku.

$$0 \leq r \leq a, \quad B 2r\pi = \mu_0 J_1 S_1 = \mu_0 I \frac{r^2 \pi}{a^2 \pi} = \mu_0 I \left(\frac{r}{a} \right)^2$$

$$a \leq r \leq b, \quad B 2r\pi = \mu_0 J_1 S_2 = \mu_0 I \frac{a^2 \pi}{a^2 \pi} = \mu_0 I$$

$$b \leq r \leq c, \quad B 2r\pi = \mu_0 (J_1 S_1 - J_3 S_3) = \mu_0 I \left(\frac{a^2 \pi}{a^2 \pi} - \frac{(r^2 - b^2) \pi}{(c^2 - b^2) \pi} \right) = \mu_0 I \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

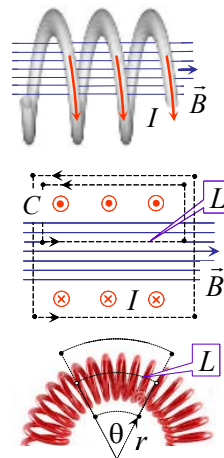
$$c \leq r < \infty, \quad B 2r\pi = \mu_0 (J_1 S_1 - J_3 S_4) = \mu_0 I \left(\frac{a^2 \pi}{a^2 \pi} - \frac{(c^2 - c^2) \pi}{(c^2 - b^2) \pi} \right) = 0$$

24. Magnetno polje solenoida i torusa

Ampèreova kontura oblika pravougaonika ima par stranica dužine L koje su paralelne sa vektorom magnetnog polja. Ako se kontura postavi tako da obuhvata više celih navojaka, algebarski zbir jačina struja biće jednak nuli. Kad jedna od stranica prolazi kroz solenoid ukupna obuhvaćena jačina struje je proizvod jačine struje kroz solenoid i broja zavoja.

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \underbrace{BL = \mu_0 NI}_{\text{algebarski zbir}} = \mu_0 \sum I$$

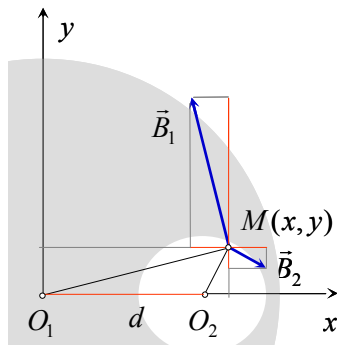
Solenoid može da bude povijen, najčešće po krugu, i tada se dobija torusni namotaj (lekcija 73). Zamišljena strujna kontura sada može da bude oblika kružnog sektora. Dobija se isti rezultat, samo što je dužina linije sada dužina luka, $L = r\theta$.



$$B = \mu_0 \frac{NI}{L}$$

25. Magnetno polje u ekscentričnoj šupljini

U metalnom cilindru poluprečnika r_1 nalazi se cilindrična šupljina poluprečnika r_2 . Rastojanje osa cilindra je d . Po principu linearne superpozicije, magnetno polje u šupljini je jednako vektorskom zbiru polja koje bi nezavisno poticale od struja suprotnih smerova u oba cilindra kad bi ovi bili potpuno puni.



U tački koja pripada šupljini magnetna polja su

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{2} \mu_0 J \vec{r}_1,$$

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{2} \mu_0 J \vec{r}_2,$$

$$\vec{B}_{1x} = -B_1 \sin(\vec{r}_1, \hat{x}) \hat{x} = -\frac{y}{2} \mu_0 J \hat{x}, \quad \vec{B}_{2x} = B_2 \sin(\vec{r}_2, \hat{x}) \hat{x} = \frac{y}{2} \mu_0 J \hat{x},$$

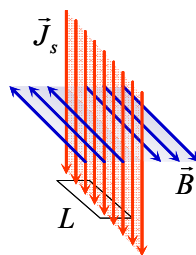
$$\vec{B}_{1y} = B_1 \cos(\vec{r}_1, \hat{x}) \hat{y} = \frac{x}{2} \mu_0 J \hat{y}, \quad \vec{B}_{2y} = -B_2 \cos(\vec{r}_2, \hat{x}) \hat{y} = -\frac{x-d}{2} \mu_0 J \hat{y}.$$

Rezultantno magnetno polje u šupljini je homogeno i ima samo komponentu normalnu na rastojanje između osa.

$$\vec{B} = \vec{B}_{2y} + \vec{B}_{2y} \cos(\vec{r}_2, \hat{x}) \hat{y} = \frac{d}{2} \mu_0 J \hat{y} = \frac{d}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} \mu_0 I \hat{y}.$$

26. Magnetno polje strujnog plašta

Struja konstantne gustine J_s teče po ravni čineći strujni plašt. Primenom *Ampèreovog* zakona na pravougaonu konturu zanemarljive širine i dužine L se dobija izraz koji je savršena analogija sa električnim poljem naelektrisanje ravni.



$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \underbrace{2BL = \mu_0 J_s L}_{\text{Ampèreov zakon}} = \mu_0 \int_S \vec{J} d\vec{S},$$

Magnetostatičko polje $\vec{B}$	
jedan plašt	dva plašta
$B = \frac{1}{2} \mu_0 J_s$	$B = \mu_0 J_s$

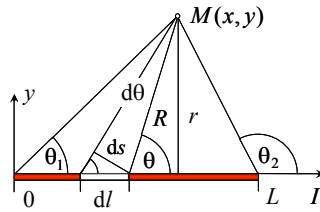
Elektrostatičko polje $\vec{E}$	
jedna ravan	dve ravni
$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \eta$	$E = \frac{1}{\epsilon_0} \eta$

27. Magnetno polje prave strujne niti - 1

Provodnik kroz koji protiče struja jačine I , a čija je dužina znatno veća od dimenzija poprečnog preseka je strujna nit.

Magnetno polje na rastojanju r od prave strujne niti (konačne dužine) može da se dobije iz *Biot-Savartovog* zakona pomoću elementarnih geometrijskih odnosa.

$$ds = R d\theta, \quad \sin \theta = \frac{ds}{dl}, \quad \sin \theta = \frac{r}{R}$$

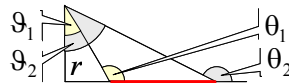


$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{R}}{R^2} \quad \triangleright \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \sin \theta dl$$

$$d\theta = \frac{\sin \theta}{R} dl, \quad \frac{1}{R} = \frac{\sin \theta}{r} \quad \triangleright \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \sin \theta d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \quad \triangleright \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

- Alternativni izraz se dobija ako se koriste uglovi iz kojih se nit vidi.



$$\sin \vartheta_1 = -\cos \theta_1, \quad \sin \vartheta_2 = -\cos \theta_2 \quad \triangleright \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1)$$

- Kad je tačka M u kojoj se određuje polje na osi strujne niti, $\theta_1 = \theta_2$, magnetno polje je jednako nuli.



$$B = 0$$

- Za neograničenu strujnu nit granice integracije postaju $\theta_1 = 0$ i $\theta_2 = \pi$, pa se tako dobija poznati izraz za *Biot-Savartov* zakon.

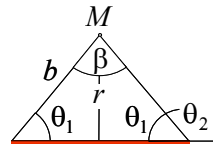


$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

- Kad se polje računa u tačkama na simetrali strujne niti uglovi integracije postaju

$$\theta_2 = \pi - \theta_1, \quad \theta_1 = (\pi - \beta)/2, \quad \theta_2 = (\pi + \beta)/2,$$

gde je β ugao pod kojim se strujna nit vidi.



Ako je b dužina jednog od potega koji spaja krajnje tačke strujne niti sa tačkom M tada iz geometrijskih odnosa sledi da je

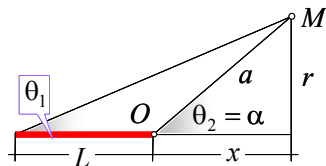
$$r = b \sin \theta_1 = b \cos \frac{\beta}{2}, \quad \triangleright$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \tan \frac{\beta}{2}.$$

28. Magnetno polje prave strujne niti - 2

Neka je strujna nit dužine L . Na rastojanju a od početka duži O je tačka M u kojoj je potrebno odrediti jačinu magnetnog polja. Poteg OM i duž grade ugao α . Na osnovu oznaka sa slike je

$$r = a \sin \alpha \quad \text{i} \quad x = a \cos \alpha.$$

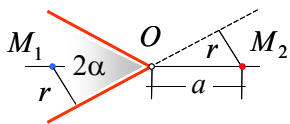


Na osnovu prethodno izvedenog izraza neposredno se dobija

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a \sin \alpha} \left(\frac{L + a \cos \alpha}{\sqrt{L^2 + a^2 + 2aL \cos \alpha}} - \cos \alpha \right).$$

- Za $\alpha = \pi/2$ poteg OM je normala na strujnu duž. Tada je i $a = r$. $\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}$
- Za $\alpha = 0$ tačka M je na osi duži. $\Rightarrow B = 0$
- Kad je $L \gg a$ ili $L \rightarrow \infty$ duž prerasta u polupravu. $\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \tan \frac{\alpha}{2}$
- Kad je $L \gg a$ ili $L \rightarrow \infty$ i $\alpha = \pi/2$ $\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$

Dve poluprave sa zajedničkim početkom u tački O grade ugao 2α . Tačke M_1 i M_2 se nalaze na simetrali ugla, centralno simetrično u odnosu na tačku O , i na jednakim rastojanjima, a .



Jačina magnetnog polja u datim tačkama je jednaka zbiru jačina polja koje potiču od dve poluprave od kojih svaka stvara polje iste jačine, pravca i smera.

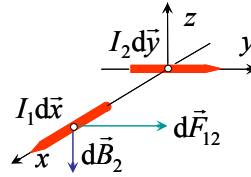
Tačka M_1 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi - \alpha$	$\Rightarrow$	$B_1 = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cot \frac{\alpha}{2}$
--	---------------	---

Tačka M_2 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \alpha$	$\Rightarrow$	$B_2 = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \tan \frac{\alpha}{2}$
--	---------------	---

- Kad je $\alpha = \pi/2$ dve poluprave daju jednu pravu, pa se dobija dobro poznat izraz za *Biot-Savartov* zakon. $\Rightarrow B = B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

29. Magnetna sila između dva strujna elementa

Kroz dva međusobno normalna strujna elementa protiču struje koje stvaraju magnetno polje tako da provodnici deluju jedan na drugi odgovarajućim magnetnim silama. Magnetno polje jednog elementa računa se na mestu drugog.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{R}}{R^2} \quad \left[\begin{array}{l} d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{dx}{x^2} \hat{x} \times \hat{x} = \vec{0} \\ d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{dy}{x^2} \hat{y} \times \hat{x} = -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{dy}{x^2} \hat{z} \end{array} \right.$$

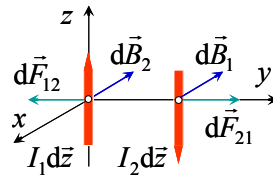
$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad \left[\begin{array}{l} d\vec{F}_{12} = -I_1 dx \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{dy}{x^2} \hat{x} \times \hat{z} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{dx dy}{x^2} \hat{y} \\ d\vec{F}_{21} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Oдавде sledi da osnovni zakoni magnetizma nisu u skladu sa sa trećim *Newtonovim* zakonom akcije i reakcije, što je matematički tačno.

$$\begin{array}{l} \hat{R}_{21} = -\hat{R}_{12}, \quad d\vec{F}_{12} \neq -d\vec{F}_{21} \\ d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \hat{R}_{21}) \neq d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \hat{R}_{12}) \end{array}$$

Ova protivrečnost ne postoji kad su strujni elementi paralelni.

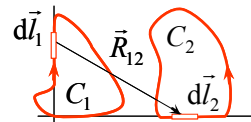
$$d\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{dz}{y^2} \hat{x}, \quad d\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{dz}{y^2} \hat{x}$$



Sile međusobnog dejstva su po intenzitetu jednake i imaju odbojni karakter ako su struje suprotnih smerova (kao na slici) i imaće privlačni karakter ako su struje istih smerova,

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{dz^2}{y^2} \hat{y}, \quad d\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{dz^2}{y^2} \hat{y}, \quad d\vec{F}_{12} = -d\vec{F}_{21}.$$

Međutim, fizički smisao treba tražiti samo kod fizički realnih problema. Izolavani strujni element ne može da postoji samostalno i uvek je deo neke zatvorene strujne konture.



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{R}_{12}}{R_{12}^2}, \quad \vec{F}_{21} = I_2 \oint_{C_2} d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R^2} \hat{R}.$$

Razultantne magnetne sile se povinuju svim poznatim fizičkim zakonima.

30. Magnetno polje i sile dve paralelne strujne niti

Opštu formulu za magnetnu silu između dva strujna elementa, koja je spoj *Biot-Savartovog* zakona i *Lorentzove* sile u jednu formulu, izveo je *Maxwell* sledeći *Ampèreove* originalne zapise.

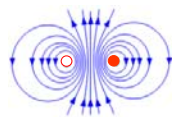
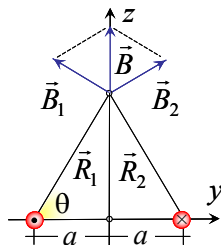
Za ukupnu silu između strujnih niti izraz treba integraliti po obe dužine. Tada se sila računa po jedinici dužine niti.

$$d^2 \vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \hat{R})}{R^2}$$

Dve strujne niti koje su geometrijski paralelne, u elektrimagnetnom smislu su paralelene ako kroz njih protiču struje jednakih jačina i isih smerova. Ako su struje suprotnih smerova strujne niti su antiparalelne. Drugi slučaj predstavlja klasičan dvožični vod za snabdevanje potrošača električnom energijom. Neka su strujne niti jednakih konačnih dužina L .

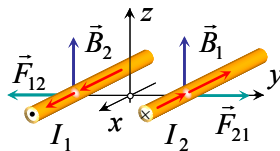
- Koordinatni početak *Descartesovog* koordinatnog sistema je na sredini rastojanja dve niti, $d = 2a$, koje koincidira sa y -osom. Struje teku u pravcu x -ose. Kod antiparalelnih strujnih niti magnetno polje u ravni simetrije $y = 0$ ima samo z -komponentu.

$$\begin{aligned} \vec{B}_{1y} &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\sin \theta}{R} \hat{y} & \vec{B}_{1z} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\cos \theta}{R} \hat{z} \\ \vec{B}_{2y} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\sin \theta}{R} \hat{y} & \vec{B}_{2z} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\cos \theta}{R} \hat{z} \\ \vec{B}_y &= 0 & \vec{B}_z &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a}{a^2 + z^2} \hat{z} \end{aligned}$$



Iz izraza za magnetno polje koju jedan provodnik stvara na mestu položaja drugog, $R = 2a = d$ sledi izraz za silu, koja je u ovom slučaju odbojna.

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{z} \\ \frac{\vec{F}_{12}}{L} &= -\frac{\vec{F}_{21}}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} (-\hat{x} \times \hat{z}) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} \hat{y} \end{aligned}$$



- Kod paralelnih strujnih niti magnetno polje u ravni simetrije $y = 0$ ima samo y -komponentu. Magnetno polje je jednako nuli za $z = 0$. Kroz ovu pravu prolazi singularna površ polja. Polje je jednako nuli i u beskonačnosti. Između dve nule neprekine i diferencijabilne funkcije (*Rolleova* teorema) mora da postoji ekstremna vrednost.

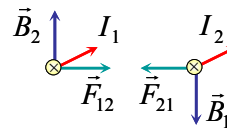
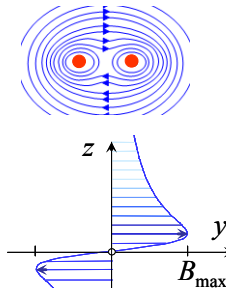
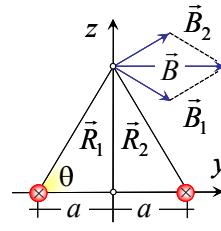
$$\begin{aligned}\vec{B}_{1y} &= \frac{\mu_0 I \sin \theta}{2\pi R} \hat{y} & \vec{B}_{1z} &= -\frac{\mu_0 I \cos \theta}{2\pi R} \hat{z} \\ \vec{B}_{2y} &= \frac{\mu_0 I \sin \theta}{2\pi R} \hat{y} & \vec{B}_{2z} &= \frac{\mu_0 I \cos \theta}{2\pi R} \hat{z} \\ \vec{B}_y &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{z}{a^2 + z^2} \hat{y} & \vec{B}_z &= \vec{0}\end{aligned}$$

Položaj najveće jačine polja se dobija kad se prvooi izvod izjednači sa nulom.

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a^2 - z^2}{(a^2 + z^2)^2} = 0 \quad \triangleright \quad z = \pm a$$

$$\vec{B}_{\max} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \begin{cases} \hat{y}, & z < 0 \\ -\hat{y}, & z > 0 \end{cases}$$

Kod paralelnih strujnih niti sila interakcije je je ista po jačini i pracu kao i kod antiparalelnih samo što sada ima privlačni karakter.



31. Jedinica za jačinu struje - amper

Izraz za silu po jedinici dužine između dve paralelne strujne niti u najjednostavnijem obliku je poznat kao *Ampèreov zakon sile* i potiče iz 1825. godine.

Konstanta k_A je nazvana konstanta magnetne sile i od njene vrednosti zavisi koliko će biti velika jedinica za jačinu struje (lekcija 19). Vrednost konstante sile je definisana u SI pomoću magnetne konstante kojoj je takođe dodeljena vrednost.

$$\frac{F}{L} = 2k_A \frac{I_1 I_2}{d}$$

$$k_A = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2}{d}$$

U SI jedinica za jačinu struje je amper. To je četvrta osnovna jedinica (kilogram, metar, sekund i amper) i pored toga što je definisana na osnovu izvedene jedinice njutn.

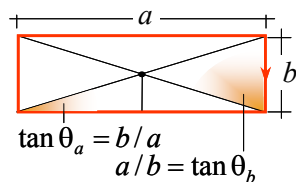
Amper je ona jačina stacionarne električne struje, koja održavana u dva paralelna provodnika beskonačnih dužina i zanemarljivo malih površina poprečnih preseka, koji se nalaze na rastojanju od 1m u vakuumu, čini da ovi provodnici dejstvuju jedan na drugog silom od $2 \cdot 10^{-7}$ njutna po jednom metru dužine provodnika.

32. Pravougaona strujna kontura

Na osnovu izvedenih izraza za magnetno polje koje potiče od prave strujne niti lako se dolazi do izraza za magnetno polje koje potiče od pravougaone strujne konture. Neka je zbog jednostavnosti, a bez gubljenja na opštosti, tačka u kojoj se određuje jačina magnetnog polja u preseku dijagonala pravougaonika čije su stranice a i b .

Iz osnovnog izraza za magnetno polje u tačkama na simetrali prave strujne niti konačne dužine,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos\theta - \cos(\pi - \theta)),$$



slede izrazi za jačine magnetnih polja koja potiču od provodnika koji koincidiraju sa stranicama pravougaonika a i b , respektivno,

$$B_a = \frac{\mu_0 I}{\pi b} \cos\left(\arctan \frac{b}{a}\right) \quad \text{i} \quad B_b = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \cos\left(\arctan \frac{a}{b}\right).$$

Jačina magnetnog polja zavisi od odnosa stranica pravougaonika. Neka je zbog jednostavnosti $a \geq b$. Ako se odnos stranica pravougaonika označi kao $n = a/b \geq 1$, ukupna jačina magnetnog polja u preseku dijagonala pravougaone strujne konture može da se izrazi kao

$$B = \frac{2\mu_0 I}{\pi b} \left(\cos\left(\arctan \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cos\left(\arctan n\right) \right), \quad n = \frac{a}{b} \geq 1.$$

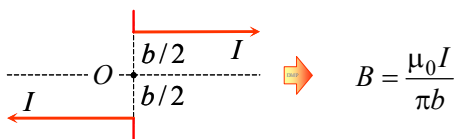
• Kad je $n = 1$, $a = b$, pravougaonik postaje kvadrat. Jačina magnetnog polja u centru kvadrata je četiri puta veća od one koju bi stvarala samo jedna stranica.

$$\Rightarrow B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi b}$$

• Kad $n \rightarrow \infty$, tj. kad je $a \gg b$, pravougaonik degeneriše u dve antiparalelne prave. Magnetno polje je dva puta veće od onog koje bi stvarala samo jedna prava.

$$\Rightarrow B = \frac{2\mu_0 I}{\pi b}$$

• Dve antiparalelne poluprave, na istim rastojanjima od tačke, proizvode u toj tački istu jačinu magnetnog polja kao i jedna prava.

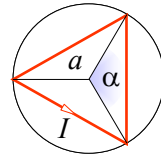


$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{\pi b}$$

Radi poređenja sa ranije izvedenim izrazima potrebno je izvršiti smenu $b = 2r$, jer su poslednji izrazi izvedeni za rastojanje koje je polovina kraće stranice pravougaonika.

33. Mnogougona i kružna strujna kontura

Neka je žičana kontura oblika pravilnog mnogougla, upisana u kružnicu poluprečnika a . Magnetno polje u centru kružnice (mnogougla) je jednako proizvodu broja stranica i magnetnog polja koja potiče od jedne stranice, tako da je



$$B_N = N \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{\tan(\alpha/2)}{\alpha/2} = \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{N}{\pi} \tan \frac{\pi}{N},$$

gde je $\alpha = 2\pi/N$ centralni ugao, i $N \geq 3$ broj stranica mnogougla. Kad se broj stranica neograničeno uvećava, mnogougao teži kružnici, pa sledi da je izraz za magnetno polje strujne kružnice u njenom centru,

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2a} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tan(\pi/N)}{\pi/N} = \frac{\mu_0 I}{2a}.$$

Koristi se činjenica da je

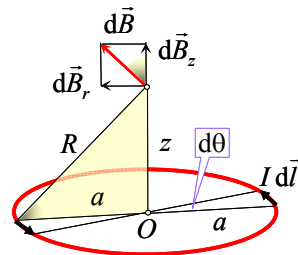
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Mnogougao	$N = 3$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 12$	$N \rightarrow \infty$
$\frac{B_N}{B_0}$	$\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$	$\frac{12(2-\sqrt{3})}{\pi}$	
	1.654	1.272	1.103	1.023	1.000

Do izraza za magnetno polje u tačkama na osi kružne strujne konture poluprečnika a se dolazi i direktnom primenom *Biot-Savartovog* zakona. Tada je

$$dl = a d\theta, \quad |d\vec{l} \times \vec{R}| = aR d\theta, \quad R = \sqrt{a^2 + z^2}$$

$$dB_z = dB \cos(\vec{a}, \vec{R}) = dB \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \quad \triangleright \quad B = B_z = \oint_C dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta.$$

Na osi konture radialne komponente vektora magnetnog polja koje potiču od centralno simetričnih strujnih elemenata se anuliraju i ostaje samo aksijalna komponenta. Magnetno polje u centru kružnice se dobija kad se u formulu zameni $z = 0$.

$$B_K = \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{a^3}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = B_0 \frac{a^3}{(z^2 + a^2)^{3/2}}, \quad B_0 = B_K|_{z=0}, \quad \triangleright \quad \boxed{B_0 = \frac{\mu_0 I}{2a}}$$

34. Magnetno polje kružnog luka i poluprave

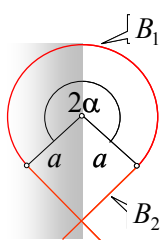
Strujna kontura sastoji se od kružnog luka centralnog ugla 2α i poluprečnika a , i dve poluprave koje luk tangiraju u tačkama spajanja. Opšti izrazi za jačine magnetnih polja delova ove strujne konture su ranije izvedeni (lekcije 27 i 33).

Kružni luk

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\alpha d\theta = \frac{\mu_0 I \alpha}{4\pi a}$$

Poluprava

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$



$$B = 2B_1 + 2B_2$$

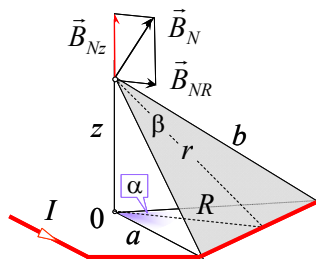
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (1 + \alpha)$$

35. Magnetno polje na osi mnogouglaone konture

U opštem slučaju, tačka u kojoj se izračunava magnetno polje nije u centru mnogouglaone strujne konture. Iz formule koja je ranije izvedena (lekcija 27),

$$B = N \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \tan \frac{\beta}{2}$$

jednostavnim transformacijama se dobija formula za polje u tačkama na osi,



$$\vec{B}_N = \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{a^3}{(z^2 + a^2 \cos^2(\alpha/2)) \sqrt{z^2 + a^2}} \hat{z},$$

u kojoj su potrebne veličine izražene pomoću centralnog ugla pravilnog mnogougla $\alpha = 2\pi/N$ i poluprečnika opisane kružnice a , i gde je $N \geq 3$ broj stranica mnogougla.

U specijalnom slučaju, kad $N \rightarrow \infty$ dobija se formula za magnetno polje na osi kružne strujne konture (lekcija 33).

$$B_K = \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{a^3}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Odnos jačina magnetnih polja koje u istoj tački svoje ose stvaraju kružna kontura i mnogougao koji je u nju upisan dovode do ideje o približnom izračunavanju (proceni) magnetnog polja.

$$z \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\tan \alpha/2}{\alpha/2} \leq \frac{B_{Nz}}{B_{0z}} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{(z/a)^2 + 1}{(z/a)^2 + \cos^2(\alpha/2)} \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} \Leftarrow z \rightarrow \infty$$

36. Mogućnost procene jačine magnetnog polja

Ako kružnica opisana oko mnogougla ima poluprečnik a , tada kružnica upisana u mnogougao ima poluprečnik $b = a \cos(\alpha/2)$. Jačina magnetnog polja koja potiče od strujne konture oblika pravilnog mnogougla se može proceniti kao srednja vrednost jačina magnetnih polja koja potiču od upisane i opisane kružne strujne konture. Uticaj geometrije konture na vrednost magnetnog polja je najveći u centru konture.

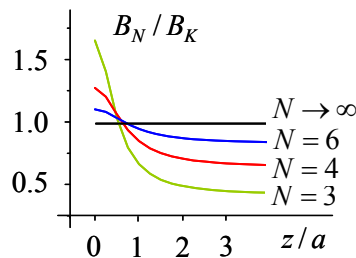
Magnetno polje u centru konture	Opisana kružnica	$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2a}$
	Upisana kružnica	$B_u = \frac{\mu_0 I}{2b} = B_0 \frac{1}{\cos(\pi/N)}$
	Mnogougao tačna vrednost	$B_N = N \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \tan \frac{\alpha}{2} = B_0 \frac{N}{\pi} \tan \frac{\pi}{N}$
	Mnogougao procenjena vrednost	$B_s = \frac{1}{2}(B_0 + B_u) = \frac{1}{2} B_0 \left(1 + \frac{1}{\cos(\pi/N)} \right)$
	Odnos tačno/usrednjeno	$\frac{B_N}{B_s} = \frac{2N}{\pi} \frac{\sin(\pi/N)}{1 + \cos(\pi/N)}$

Mnogougao	$N = 3$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 12$	$N \rightarrow \infty$
B_N / B_s	1.102	1.054	1.023	1.005	1.000

Koristeći prethodno izvedene formule, na isti način je moguće proceniti magnetno polje u bilo kojoj tački na osi konture. Za potrebe takve procene korisno je proučiti odnos jačina magnetnih polja koje u istoj tački stvaraju mnogougao i kružna strujna kontura.

$$\frac{B_N}{B_K} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{z^2 + a^2}{z^2 + a^2 \cos^2(\alpha/2)}$$

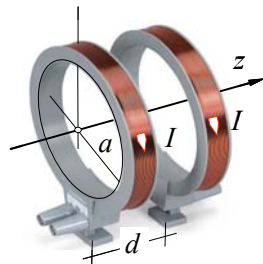
Na malim rastojanjima od centra konture, $z/a < 0.5$, mnogouglovi sa manjim brojem stranica stvaraju veće polje od onih sa većim brojem stranica ili od kruga.



Razlog za to je činjenica da su stranice takvih mnogouglova bliže svom centru. Na velikim rastojanjima efekat blizine je zanemarljiv i jačina polja je srazmerna magnetnom momentu, tj. površini konture.

37. Helmholtzovi i gradijentni kalemovi

Neka su date dve koaksijalne kružne strujne konture istih poluprečnika, a , koje su opticane stalnim strujama iste jačine i smera, I . Dalje, neka su centri kontura na međusobnom rastojanju d , i neka je koordinatni početak polarno-cilindričnog koordinatnog sistema u centru jedne od kontura. Magnetno polje u tačkama na osi ima samo aksijalnu komponentu,



$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{2a} \left(\frac{a^3}{(a^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{a^3}{(a^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \right) = B_0 (f_1(z) + f_2(z))$$

Kad je rastojanje između strujnih kontura zanemarljivo, $d \rightarrow 0$, tada izraz za magnetno polje pokazuje da se dve bliske kružne konture ponašaju kao jedna kroz koju protiče struja dva puta veće jačine. U opštem slučaju, tanak kalem od N zavojaka može se zameniti konturom kroz koji protiče N puta veće struja.

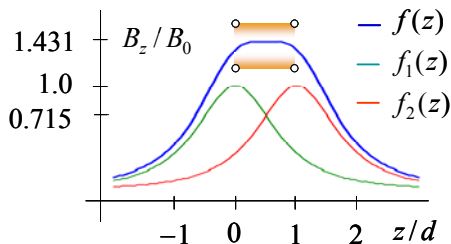
Na polovini rastojanja kontura, u okolini tačke $z = d/2$, izraz za magnetno polje je moguće izraziti u formi *Taylorovog* reda

$$\frac{B_z(z)}{B_0} = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(d/2) \frac{(z-d/2)^n}{n!} = \frac{16a^3}{(4a^2 + d^2)^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(d/2) \frac{(z-d/2)^n}{n!},$$

gde je $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$. U okolini ove tačke polje biti utoliko homogenije ukoliko je veći broj članova *Taylorovog* reda moguće zanemariti. Prvi izvod i svi ostali izvodi neparnog reda su (zbog simetrije) u datoj tački jednaki nuli. Dakle, najhomogenije moguće polje će se dobiti izjednačavanjem drugog izvoda sa nulom.

$$\left. \frac{d^2 f}{dz^2} \right|_{z=d/2} = \frac{6a^3 (d^2 - a^2)}{(a^2 + (d/2)^2)^{7/2}} \equiv 0 \quad \triangleright \quad d = a \quad \triangleright \quad \left. \frac{B_z(z)}{B_0} \right|_{z=d/2} = \frac{16}{5\sqrt{5}}$$

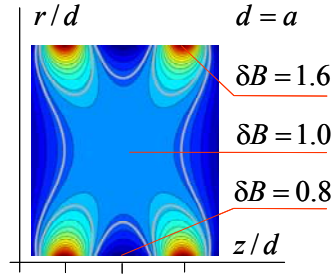
Dve kružne konture na međusobnom rastojanju koje je jednako poluprečniku kontura čini *Helmholtzov* par koji ima veoma široku primenu. Homogeno polje se primenjuje u velikom broju uređaja u koje spada i eliminacija uticaja Zemljinog magnetnog polja.



Izračunavanje magnetnog polja u tačkama koje ne pripadaju osi obruča je znatno složenije (lekcija 44). Radi vizuelizacije homogenosti ostvarenog polja prikazan je odnos magnetnih polja

$$\delta B = B(r, z) / B(0, d/2)$$

koji podrazumeva takva izračunavanja.



Magnetno polje u tačkama na osi dva kružna obruča jednakih poluprečnika kroz koje protiču struje istog intenziteta ali suprotnih smerova izračunava se na isti način kao u prethodnom slučaju, samo što sada drugi sabirak u osnovnom izrazu ima negativan znak.

$$B_z(z) = B_0 (f_1(z) - f_2(z)), \quad f(z) = f_1(z) - f_2(z)$$

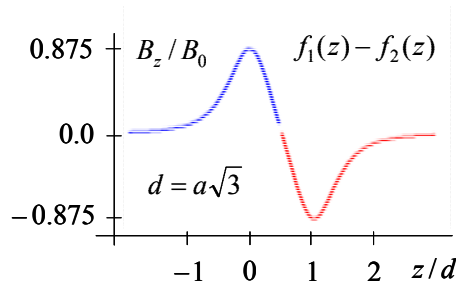
Ovo je antisimetrični slučaj kad su vrednosti funkcije i svih izvoda parnog reda jednaki nuli u središtu između prstenova. Tako u *Taylorovom* razvoju ostaje

$$\frac{B_z(z)}{B_0} = \frac{-3da^3}{(a^2 + (d/2)^2)^{5/2}} \frac{(z - d/2)^1}{1!} + \frac{15da^3(3a^2 - d^2)}{(a^2 + (d/2)^2)^{9/2}} \frac{(z - d/2)^3}{3!} + \dots$$

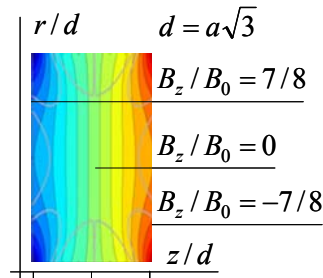
Ako je i treći izvod funkcije jednak nuli, tada će u okolini središnje tačke promena magnetnog polja biti linearna. Iz tog uslova se sledi

$$d = a\sqrt{3}.$$

Dva jednaka kalema na ovom rastojanju čine gradijentni par.



U literaturi se sreće i naziv *Maxwellovi* kalemovi, što nije tačno. *Maxwell* je dao poboljšanje homogenosti polja dodajući još jedan kalem u *Helmholtzov* par. Time se može postići da izvod četvrtog reda bude jednak nuli, što znači još homogenije polje.

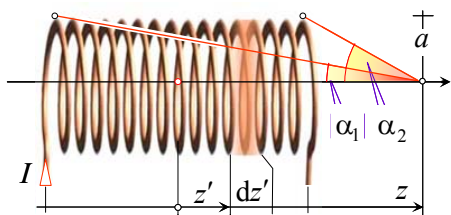


Linearna magnetna polja imaju veliku primenu uključujući dijagnostiku magnetnom rezonansom. Zbog toga se istraživanja sprovode na kalemove kvadratnog oblika ili oblika sedla (patent iz 1957. godine, *M. J. Golay*).

38. Magnetno polje na osi solenoida

Neka solenoid ima poluprečnik a i konačnu dužinu L , koja je srazmerna broju namotaja, debljini provodnika i koraku namotavanja. Tako postoje gusto i retko motani solenoidi. Međutim, solenoid može da bude načinjen iz više slojeva namotaja. U svakom slučaju solenoid je konačan broj elementarnih koaksijalnih strujnih kontura. Ako je broj namotaja po jedinici dužine solenoida N/L , tada je prema formuli za magnetno polje na osi kružne strujne konture (lekcija 33)

$$dB_z = \frac{\mu_0 NI}{2aL} \frac{a^3}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dz'$$



$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (z - z')^2}}$$

$$z - z' = a \cot \alpha,$$

$$dz' = a / \sin^2 \alpha$$

$$B_z = \frac{\mu_0 NI}{2L} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha,$$

$$B_a = \frac{\mu_0 NI}{L},$$

$$B_z = B_a f(z)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 NI}{2L} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

Opšta formula

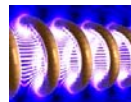
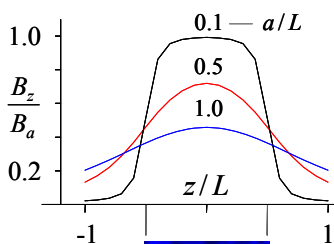


$$B_z = \frac{\mu_0 NI}{L} \frac{1}{2} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{a^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2 + (z - L/2)^2}} \right]$$

Ovde je sa B_a obeležena ona vrednost magnetnog polja koja se donija primenom *Ampèreovog* zakona (lekcija 24). Teorijski ovaj zakon daje tačan rezultat samo za beskonačno dug solenoid jer je tada

$$\lim_{L \rightarrow \infty} B_a f(z) = B_a.$$

Praktično, kod solenoida čija je dužina desetak puta veća od poluprečnika, polje je u najvećem delu dužine homogeno.



• Jačina magnetnog polja u sredini solenoida.

$$z = 0$$



$$B_0 = \frac{\mu_0 NI}{L} \frac{L}{2\sqrt{a^2 + (L/2)^2}}$$

• Jačina magnetnog polja na krajevima solenoida.

$$z = \pm \frac{L}{2}$$



$$B_L = \frac{\mu_0 NI}{L} \frac{L}{2\sqrt{a^2 + L^2}}$$

• Jačinu magnetnog polja nije moguće povećati povećavanjem broja namotaja u jednom sloju, jer veći broj namotaja znači srazmerno veću dužinu, tj. odnos N/L je stalan.

• Kod vitkih solenoida (dužina je znatno veća od poluprečnika poprečnog preseka). Za jačinu magnetnog polja u sredini solenoida se dobija izraz koji bi se dobio i primenom *Ampèreovog* zakona. Na krajevima solenoida magnetno polje je dvostruko slabije nego u sredini.

• Kod veoma kratkih solenoida, koji se sastoje od par namotaja, dužina je zanemarljivo mala, pa je i znatno manja od poluprečnika namotaja. Magnetno polje na krajevima je isto kao u sredini i isto sa kao polje kružne konture.

$$L \gg a$$

$$B_0 = B_a = \frac{\mu_0 NI}{L}$$

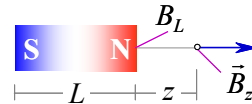
$$B_L = \frac{1}{2} B_a = \frac{\mu_0 NI}{2L}$$

$$L \ll a$$

$$B_0 = B_L = \frac{\mu_0 NI}{2a}$$

• Ako se u proračun uključe veličine koje se lako mere, a to su jačina polja na kraju solenoida i rastojanje tačke na osi od kraja solenoida, onda se iz opšte formule dobija formula koja se najčešće primenjuje u praksi, i koja važi za bilo koje rastojanje.

$$B_z = B_L \frac{\sqrt{a^2 + L^2}}{L} \left[\frac{z + L}{\sqrt{a^2 + (z + L)^2}} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]$$



• Kad je rastojanje tačke u polju znatno veće od dužine dipola, uglovi pod kojima se vide krajevi solenoida se vrlo malo razlikuju i opšta formula može da se preuredi na sledeći način.

Dipolna aproksimacija

$$z \gg L$$

$$\alpha_1 = \alpha$$

$$\alpha_2 = \alpha + \Delta\alpha$$



$$\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 = 2 \sin(\Delta\alpha/2) \sin(\alpha + \Delta\alpha/2) \approx \Delta\alpha \sin \alpha$$

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha = a/z$$

$$\Delta\alpha \approx \Delta \tan \alpha = \tan \alpha_2 - \tan \alpha_1 = \frac{a}{z - L/2} - \frac{a}{z + L/2} \approx \frac{aL}{z^2}$$

$$B_z = B_a f(z) = \frac{\mu_0 NI}{L} \frac{a^2 L}{2z^3} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \frac{a^2 \pi}{z^3} = \frac{\mu_0 NIS}{2\pi} = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}$$

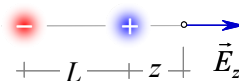
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{z^3}$$

Sa velikih rastojanja solenoid se vidi kao magnetni dipol (lekcija 4).

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{z^3}$$

Potpuno istu formu ima izraz za električno polje na osi električnog dipola, koji je izveden na osnovu postojanja tačkastih naelektrisanja na krajevima.

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+L)^2} \right] \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2L}{z^4} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}$$



39. Magnetni vektor potencijal

Vektor magnetnog polja $\vec{B}$ zadovoljava dve osnovne jednačine, tj. dva osnovna zakona.

Zakon o konzervaciji magnetnog fluksa	$\text{div } \vec{B} = 0$
<i>Ampèreov zakon</i>	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

Uvedimo pomoćnu vektorsku funkciju, koja je nazvana magnetni vektor potencijal, sa oznakom $\vec{A}$.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Jedinica za magnetni vektor potencijal je tesla puta metar, što će to biti pokazano u kasnijem izlaganju.

$$[A] = \text{Tm}$$

Prva jednačina će biti automatski zadovoljena, jer je za bilo koju vektorsku funkciju divergencija rotora jednaka nuli, $\text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0$. Druga jednačina tada postaje

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J}.$$

?

$$\text{div } \vec{A} = 0$$

Vektorsko polje (*Helmholtzova teorema*), koje sa rastojanjem, r , opada najmanje kao $1/r$ je jednoznačno definisano ako su poznati rotor i divergencija. Divergencija vektorske funkcije $\vec{A}$ nije ni jednim fizičkim uslovom određena i može se odabrati proizvoljno. Uopšte, potencijali nisu jednoznačno određene funkcije (Sveska I). Ako se izabere da je $\text{div } \vec{A} = 0$, tada se prethodna jednačina svodi na oblik koji je savršena analogija sa *Poissonovom* jednačinom za električni skalar potencijal u elektrostatici. Rešenja obe jednačine su takođe analogna.

Magnetni vektor potencijal		Električni skalar potencijal
$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$		$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{R} dV$		$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{R} dV$
$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l}}{R}$		$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{q' dl}{R}$

Primenom *Stokesove* teoreme između fluksa magnetnog polja i magnetnog vektor potencijala je moguće uspostaviti vrlo jednostavnu i korisnu relaciju.

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \oint_C \vec{A} d\vec{l}$$

▷

$$\Phi = \oint_C \vec{A} d\vec{l}$$

⇒

$$[A] = \text{Tm}$$

40. Magnetni vektor potencijal pravog provodnika

Magnetno polje koje u svojoj okolini stvara neograničeno dug cilindrični provodnik lako se određuje primenom *Biot-Savartovog* zakona (lekcija 21). Za određivanje magnetnog polja u unutrašnjosti provodnika (i u okolini) treba primeniti *Ampèreov* zakon u integralnom obliku (lekcija 19). Kako će biti pokazano (lekcija 43), radi se o jednom istom zakonu u dva različita oblika koji se dobijaju jedan iz drugog. U integralnom obliku ovaj zakon je delotvoran samo kod geometrija sa viokim stepenom simetrije gde se dobijeni integrali mogu relativno lako rešiti. Matematičke teškoće se pojavljuju već kod određivanja magnetnog polja u tačkama van ose kružne strujne konture (lekcija 44). Zato se ponekad *Ampèreov* zakon primenjuje u diferencijalnom obliku (lekcija 19). Često se do rešenja elektromagnetih problema lakše dolazi pomoću funkcija potencijala. Ovde će to biti ilustrovano na, već više puta rešenom, trivijalnom primeru pravog neograničeno dugog provodnika.

Neka je prav provodnik poluprečnika a usmeren u pravcu z -ose. Gustina struje je uniformna po poprečnom preseku, a magnetni vektor potencijal ima samo z -komponentu koja zbog osne simetrije zavisi samo od r -koordinate.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \hat{\theta} = B_\theta \hat{\theta}$$

Magnetno polje, kao što je poznato, ima samo θ -komponentu.

Rotor i divergencija funkcije $\vec{a}(r, \theta, z)$ u polarno-cilindričnim koordinatama

$$\text{rot } \vec{a} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_r & ra_\theta & a_z \end{vmatrix}$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial (ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Kad se u *Ampèreov* zakon uvrsti magnetni vektor potencijal,

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_\theta) \hat{z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{z} = \begin{cases} -\mu_0 J, & r \leq a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

dobijaju se dve diferencijalne jednačine drugog reda.

$$\frac{d^2 A_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_z}{dr} = \begin{cases} -\mu_0 J, & r \leq a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

Očigledno da je rešenje homogenog dela prve jednačine po formi isto kao opšte rešenje druge jednačine. U obe integracije homogena diferencijalna jednačina razdvaja promenljive. Partikularni inegral se dobija metodom varijacije konstanti. Bez ulaženja u postupak rešavanja (jer je elementaran) prikazano je konačno rešenje.

$$A_z = \begin{cases} C_1 \ln r + C_2 - \frac{\mu_0 J}{4} r^2, & r \leq a \\ D_1 \ln r + D_2, & r \geq a \end{cases} \quad -B_\theta = \frac{dA_z}{dr} = \begin{cases} C_1 \frac{1}{r} - \frac{\mu_0 J}{2} r, & r \leq a \\ D_1 \frac{1}{r}, & r \geq a \end{cases}$$

Konstante integracije treba odrediti iz fizičkih uslova. Prvo, na osi provodnika $r=0$ magnetni vektor potencijal mora da ostane konačan, što znači da logaritamski član treba odbaciti, tj. $C_1=0$. Drugo, magnetno polje na površini provodnika mora da bude neprekidna funkcija. Pošto je već $C_1=0$, to sledi

$$\left. \frac{dA_z}{dr} \right|_{r=a-} = \left. \frac{dA_z}{dr} \right|_{r=a+} \quad \triangleright \quad \underbrace{-\frac{\mu_0 J}{2} a}_{B_\theta(r=a-)} = \underbrace{D_1 \frac{1}{a}}_{B_\theta(r=a+)} \quad \triangleright \quad D_1 = -\frac{\mu_0 J}{2} a^2$$

Tako se dobija konačni izraz za magnetno polje koji je i ranije izveden. Međutim, time problem nije rešen do kraja. U izrazu za magnetni vektor potencijal još uvek postoje dve konstante čija vrednost nije određena. Kad nema struje nema ni potencijala, odakle pogrešno sledi da je $C_2 = D_2 = 0$

$$B_\theta = \begin{cases} \mu_0 J \frac{1}{2} r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{r}{a} \right)^2, & r \leq a \\ \mu_0 J \frac{a^2}{2r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r \geq a \end{cases}$$

$$A_z = \begin{cases} C_2 - \frac{\mu_0 J}{4} r^2, & r \leq a \\ D_2 - \frac{\mu_0 J}{2} a^2 \ln r, & r \geq a \end{cases}$$

Sa ovako određenim konstantama magnetni vektor potencijal ne bi bio neprekidna funkcija na razdvojnoj površini $r=a$. I pored toga što ove konstante ne utiču na izraze za magnetno polje, jer se u postupku diferenciranja gube, rešenje treba prezicno dovesti do kraja, jer magnetni vektor potencijal (kao i sve funkcije potencijala) mora da bude neprekidna i diferencijabilna funkcija. Da bi obezbedila neprekidnost treba da bude

$$A_z(r=a-) = A_z(r=a+) \quad \triangleright \quad C_2 - \frac{\mu_0 J}{4} a^2 = D_2 - \frac{\mu_0 J}{2} a^2 \ln a$$

Poslednja jednakost može da bude zadovoljena ako su obe strane jednake nekoj konstanti, a najjednostavnije je da budu jednake nuli. Tako se dobija

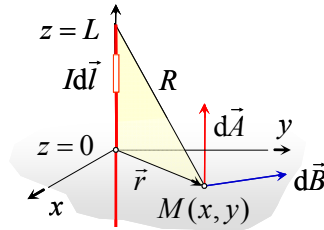
$$C_2 = \frac{\mu_0 J}{4} a^2 \quad \triangleright \quad A_z = \begin{cases} \mu_0 J \frac{1}{4} (a^2 - r^2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2}, & a \leq r \\ \mu_0 J \frac{1}{2} a^2 \ln \frac{a}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{r}, & r \geq a \end{cases}$$

Lako se proverava da je $\text{div} \vec{A} = 0$ i $\text{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$, što znači da je rešenje tačno ali ne i jedinstveno (što je uopšte slučaj kod potencijala).

41. Magnetni vektor potencijal prave strujne niti

Strujna nit dužine $2L$ koincidira sa z -osom *Descartesovog* koordinatnog sistema, a koordinatni početak je na polovini niti. Tačka $M(x, y)$ se nalazi na simetralnoj ravni na rastojanju r od koordinatnog početka,

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad R^2 = r^2 + L^2.$$



Izraz za jačinu magnetnog polja se dobija iz prethodno izvedenih izraza. Magnetni vektor potencijal ima samo z komponentu. Za tačke koje pripadaju simetralnoj ravni je

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}, \quad A_z = 2 \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^L \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + r^2}}{r}.$$

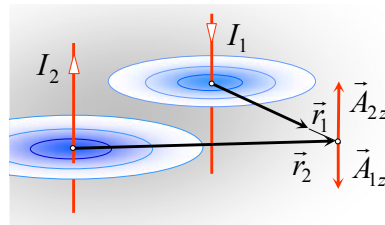
Kad je $L \gg r$ vrlo približno je $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ i $A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{r}$.

U slučaju beskonačno duge strujne niti i magnetni vektor potencijal ima beskonačnu vrednost. Međutim, jačina magnetnog polja je konačna. Takođe, magnetno polje se dobija kao izvod magnetskog vektor potencijala pa se diferenciranjem gubi uticaj izbora referentne tačke.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r^2} (-y\hat{x} + x\hat{y}) \quad \triangleright \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Projekcije u pravcima *Descartesovih* koordinatnih osa predstavljaju θ komponentu u polarno-cilindričnom koordinatnom sistemu.

• Dve paralelne struje suprotnih smerova stvaraju magnetni vektor potencijal koji je jednak razlici $A_z = A_{1z} - A_{2z}$. Ako su nosioci struja jednake duži $2L \gg r_1, r_2$, a struje jednakih jačina $I = I_1 = I_2$, sledi izraz koji je savršena analogija sa izrazom za električni skalar potencijal koji stvaraju dva podužna naelektrisanja suprotnog znaka.



$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Konačni izraz za magnetni vektor potencijal ne zavisi od dužina strujnih niti i zato važi i za beskonačno duge antiparalelne strujne niti.

42. Analogija između strujne niti i naelektrisane niti

Prethodni rezultat dovodi do ideje da je prethodno uočenu analogiju moguće proširiti.

Analogija		
$\mu_0 I$		q' / ϵ_0

Magnetostatika - Strujna nit		Elektrostatika - Naelektrisana nit	
$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$		$E_r = \frac{q'}{4\pi \epsilon_0 r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$	
 Simetralna ravan, $\cos \theta_2 = -\cos \theta_1$. 			
$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}$		$E_r = \frac{q'}{2\pi \epsilon_0 r} \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}$	
 Veoma duga ili neograničena nit, $L \gg r$ ili $\theta_1 = 0$ i $\theta_2 = \pi$. 			
$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$		$E_r = \frac{q'}{2\pi \epsilon_0 r}$	
			
Ampèreov zakon	$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$	$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	Gaussov zakon
Potencijali u tački koja pripada simetralnoj ravni			
Magnetni vektor potencijal		Električni skalar potencijal	
$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + r^2}}{r}$		$\varphi = \frac{q'}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + r^2}}{r}$	
 $L \gg r$ 			
$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{r}$		$\varphi = \frac{q'}{2\epsilon_0 \pi} \ln \frac{2L}{r}$	
Dve paralelne niti			
Struje suprotnih smerova		Naelektrisanja suprotnih znakova	
$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$		$\varphi = \frac{q'}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$	

43. Ampère-Laplace-Biot-Savartov zakon

Kad su struje kanalisane provodnicima formula za magnetni vektor potencijal se svodi na linijski integral.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_I \frac{I d\vec{l}}{R}$$

U ovim razmatranjima jačina struje je konstantna veličina i može da se piše ispred znaka integrala.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_I \text{rot} \frac{d\vec{l}}{R}$$

Podintegralna funkcija je, prema pravilima vektorskog računa, prostorni izvod proizvoda dve funkcije, tj.

$$\text{rot} \left(\frac{1}{R} d\vec{l} \right) = \text{grad} \frac{1}{R} \times d\vec{l} + \frac{1}{R} \text{rot} d\vec{l}.$$

Drugi sabirak je jednak nuli, a za prvi sabirak je potrebno odrediti gradijent recipročne vrednosti vektora položaja. Tako se dobija konačan izraz za vektor magnetnog polja.

$$\begin{aligned} \text{rot} d\vec{l} &= \vec{0} \\ \text{grad} \frac{1}{R} &= -\frac{\vec{R}}{R^3} \end{aligned}$$

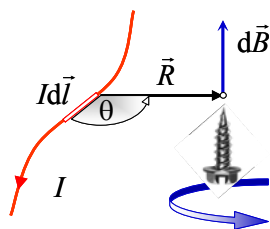
Formulu je izveo Laplace na osnovu rezultata Ampèreovih i Biot-Savartovih eksperimenata (lekcija 21) pa se sreće, istina veoma retko, korektan naziv ALBS zakon.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_I \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

Diferencijalni oblik ove formule, koji određuje magnetno polje strujnog elementa, i najpoznatiji autori nazivaju Biot-Savartov zakon !

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{R}}{R^2}$$

Pravac vektora elementarnog magnetnog polja $d\vec{B}$ je normalan na ravan koju definišu vektor $d\vec{l}$ i vektor položaja tačke, $\vec{R}$, u kojoj se polje izračunava. Smer ovog vektora se određuje (kao kod svakog vektorskog proizvoda) po pravilu desne zavojnice.



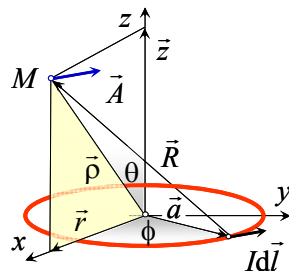
Intenzitet vektora magnetnog polja je direktno srazmeran površini paralelograma koji grade vektori $d\vec{l}$ i $\vec{R}$, tj. sinusu ugla koji ovi vektori zaklapaju.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \sin(\angle d\vec{l}, \vec{R}) dl$$

U diferencijalnom obliku Ampère-Laplaceovu formulu nije moguće eksperimentalno potvrditi, ali se zato veoma jednostavno potvrđuje u svim slučajevima strujnih kontura konačnih dimenzija.

44. Kružna strujna kontura - magnetni dipol

Linije polja magnetnog vektor potencijala u okolini kružne strujne konture su kružnice sa centrima na osi konture. Jačina magnetnog vektor potencijala, zbog osne simetrije, ne zavisi od ugla ϕ i ima samo ugaonu komponentu $A = A_\phi$. Zbog toga je tačku, u kojoj se magnetni vektor potencijal određuje, moguće odabrati u ravni $\phi = 0$.



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{R} dV = \oint \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} d\phi \quad \triangleright \quad A_\phi = 2 \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \phi}{R} d\phi,$$

gde je u cilindričnim koordinatama

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{a} + \vec{z} \quad \triangleright \quad R = \sqrt{r^2 + a^2 + z^2 - 2ar \cos \phi}.$$

Smenom $\phi = \pi - 2\alpha$, $d\phi = -2d\alpha$, $\cos \phi = 2\sin^2 \alpha - 1$, izraz za magnetni vektor potencijal postaje

$$A_\phi = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(2\sin^2 \alpha - 1) d\alpha}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2 - 4ar \sin^2 \alpha}} = \frac{\mu_0 I a k}{2\pi \sqrt{ar}} \int_0^{\pi/2} \frac{(2\sin^2 \alpha - 1) d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}},$$

gde je uvedena oznaka

$$k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2} \quad \triangleright \quad k = \sqrt{\frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}}.$$

Podintegralnu funkciju je moguće napisati u obliku

$$\frac{2\sin^2 \phi - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{k^2} \left[\frac{2 - k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} - 2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \right],$$

pa se preuređenjem dobijenog izraza dobija da je

$$A_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right] \quad \triangleright \quad A_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} f(k)$$

gde su

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{-1/2} d\alpha, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} d\alpha,$$

potpuni eliptički integrali prve i druge vrste (prilog E).

Pošto je

$$\frac{\partial K(k)}{\partial k} = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k}, \quad \frac{\partial E(k)}{\partial k} = \frac{E(k)}{k} - \frac{K(k)}{k},$$

$$\frac{\partial k}{\partial z} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+r)^2 + z^2}{4ar}} \frac{8arz}{[(a+r)^2 + z^2]^2} = -\frac{k^3 z}{4ar},$$

$$\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+r)^2 + z^2}{4ar}} \frac{4a((a+r)^2 + z^2) - 8ar(a+r)}{[(a+r)^2 + z^2]^2} = \frac{k}{2r} - \frac{k^3(a+r)}{4ar},$$

u cilindričnim koordinatama za komponente magnetnog polja se dobija

$$B_r = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{kz}{r\sqrt{ar}} \left[\frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) - K(k) \right],$$

$$B_\phi = 0,$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{k}{\sqrt{ar}} \left[\frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) + K(k) \right].$$

• U specijalnom slučaju kad tačke u kojima se određuje polje pripadaju osi konture, $r=0$, $k=0$, eliptički integrali se svode na tablične slučajeve, a za komponente polja se dobijaju od ranije poznati izrazi.

$$K(0) = E(0) = \pi/2$$

$$B_r = 0, \quad B_\phi = 0$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{a^3}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

• Kad su tačke u kojima se određuje polje na velikim udaljenostima od strujne konture pogodno je problem razmatrati u sfernim koordinatama. Cilindrična koordinata z se eliminiše pomoću $\rho^2 = r^2 + z^2$ i $r = \rho \sin \theta$. Tako se za rastojanje između tačke u polju i tačke izvora polja dobija

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 + z^2 - 2ar \cos \phi} = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \theta \cos \phi}.$$

Na velikim rastojanjima je $\rho \gg a$ pa je

$$R = \rho \sqrt{1 + \frac{a^2}{\rho^2} - 2\frac{a}{\rho} \sin \theta \cos \phi} \approx \rho \sqrt{1 - 2\frac{a}{\rho} \sin \theta \cos \phi}.$$

Za izračunavanje recipročne vrednosti rastojanja treba iskoristiti *Taylorov* red odgovarajuće funkcije i zadržati samo nulti i prvi član,

$$(1-2x)^{-1/2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i-1)!!}{i!} x^i \Rightarrow (1-2x)^{-1/2} = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \dots,$$

odnosno

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{\rho} \left(1 - 2 \frac{a}{\rho} \sin \theta \cos \phi \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{a}{\rho} \sin \theta \cos \phi \right).$$

Za magnetni vektor potencijal se tako dobija

$$A_{\phi} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi \rho} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos \phi d\phi}_0 + \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi \rho^2} \sin \theta \underbrace{\int_0^{\pi} \cos^2 \phi d\phi}_{\pi/2} = \frac{\mu_0 I a^2}{4\rho^2} \sin \theta, \quad \rho \gg a$$

Prvi sabirak, čiji je doprinos jednak nuli, odgovara magnetnom monopolu, a drugi magnetnom dipolu. Dobijeni izraz nije tačan, već je samo veoma dobra aproksimacija za magnetni vektor potencijal na velikim rastojanjima. Za dobijanje tačnog izraza recipročnu vrednost rastojanja treba upotrebiti ratvoj u red bez zanemarivanja kvadratnog člana. Tada će se pojaviti uticaji viših multipola (kvadrupol, oktopol...)

Ako se zbog jednoznačnosti u zapisivanju formula, stavi r umesto ρ , u sfernom koordinatnom sistemu je

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_{\theta} & r\sin\theta A_{\phi} \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 I a^2 \pi}{4\pi r^3} (2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}), \quad r \gg a$$

U vektorskom obliku izraz za magnetni vektor potencijal je

$$\vec{A} = A_{\phi} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I a^2 \pi}{4\pi r^2} \hat{\phi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3},$$

odakle može da se dobije izraz za magnetno polje koji ne zavisi od izbora koordinatnog sistema.

$$\begin{aligned} \vec{B} = \text{rot} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\underbrace{\text{grad} \frac{1}{r^3}}_{\text{grad} \frac{1}{r^3} = -3 \frac{\vec{r}}{r^5}} \times (\vec{m} \times \vec{r}) + \frac{1}{r^3} \underbrace{\text{rot}(\vec{m} \times \vec{r})}_{\text{rot}(\vec{m} \times \vec{r}) = 2\vec{m}} \right] \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c} \quad \triangleright \quad \vec{r} \times (\vec{m} \times \vec{r}) = r^2 \vec{m} - (\vec{r}\vec{m})\vec{r} \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m}\hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3} \end{aligned}$$

Pošto je izraz za magnetni vektor potencijal kružne strujne konture izveden za velika rastojanja od konture, to je određivanje magnetnog polja iz tog izraza zapravo dipolna aproksimacija. Postavlja se pitanje koliko je ta aproksimacija tačna. Za kružnu strujnu konturu postavljenu kao na početnoj slici se dobija:

Magnetni (dipolni) moment kružne strujne konture je (lekcija 7) $\Rightarrow \vec{m} = Ia^2\pi \hat{z}$

Dipolna aproksimacija (ova lekcija) $\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m}\hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3}$

U sfernim koordinatama je $\hat{z} = \cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}$, $\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 Ia^2\pi}{4\pi r^3} [3\cos\theta \hat{r} - \hat{z}]$

pa se dobija dipolna aproksimacija (ova lekcija). $\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 Ia^2\pi}{4\pi r^3} (2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta})$

• U tačkama na osi konture je $\hat{r} = \hat{z}$, $r = z$ i $\theta = 0$.

$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 Ia^2}{2z^3} \hat{z}$

• Tačno rešenje (lekcije 33 i 34)

$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$

• Za daleke tačke, $z \gg a$, pa se dobija isti rezultat.

$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 Ia^2}{2z^3} \hat{z}$

Magnetno polje kružne strujne konture u dalekoj zoni je dipolno dominantno. Moment monopola je jednak nuli, a momenti višeg reda su zanemarljivi u odnosu na dipoli moment. Dakle, za velika rastojanja kružna strujna kontura je magnetni dipol. Izraz za magnetno polje magnetnog dipola je potpuno analogan izrazu za električno polje električnog simetričnog dipola (Sveska I). Detaljna analogija između magnetnog i električnog dipola biće prikazana u kasnijem izlaganju (lekcija 48). Međutim, ta analogija nije savršena. Električni dipol je moguće rastaviti na dva pojedinačna tačkasta naelektrisanja koja predstavljaju monopole. Takva mogućnost kod magnetnog dipola ne postoji. Postojanje magnetnih monopola u prirodi nije do sada uočeno, niti je dokazano njihovo postojanje koje je 1931. godine predvideo *Dirac*.

Veze između jediničnih vektora:

Descartesovi preko sfernih

$$\hat{x} = \sin\theta \cos\phi \hat{r} + \cos\theta \cos\phi \hat{\theta} + \sin\phi \hat{\phi}$$

$$\hat{y} = \sin\theta \sin\phi \hat{r} + \cos\theta \sin\phi \hat{\theta} + \cos\phi \hat{\phi}$$

$$\hat{z} = \cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}$$

Sferni preko *Descartesovih*

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta \cos\phi \hat{x} + \cos\theta \sin\phi \hat{y} - \sin\theta \hat{z}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y}$$

45. Magnetni vektor potencijal solenoida

Opšte integralne formule za magnetni vektor potencijal koje su proistekle iz analogije sa elektrostatičkim poljem nije moguće primeniti kod domena neograničenih dimenzija. Kad je provodnik beskonačno dug za magnetni vektor potencijal se dobija beskonačna vrednost (lekcija 41). To je slučaj i kod beskonačnog dugog solenoida gde nije moguće primeniti *Ampèreov* zakon u integralnom obliku (lekcija 24). Problem je sličan problemu određivanja magnetnog vektor potencijala koji potiče od debelog provodnika (lekcija 40). Međutim, u ovom slučaju postoji jedna skrivena mogućnost (lekcija 39), a to je potpuna analogija između cirkulacija vektora magnetnog polja i magnetnog vektor potencijala.

Ako je moguće odrediti magnetno polje znajući konturom obuhvaćenu struju, onda je moguće odrediti magnetni vektor potencijal znajući fluks kroz površinu.

Posledica definicije	$\oint_C \vec{A} d\vec{l} = \Phi$
<i>Ampèreov</i> zakon	$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$

Da bi odredili magnetni vektor potencijal solenoida, čiji je poluprečnik a , potrebno je upotrebiti zamišljenu kružnu konturu poluprečnika r , isto kao kod primene *Ampèreovog* zakona. Za tačke u unutrašnjosti, $r < a$, kroz površinu koje je obuhvaćena zamišljenom konturom prolazi samo deo fluksa, dok kroz površinu koja je veća od površine poprečnog preseka, $r > a$, prolazi ukupan fluks.

$$\oint_C \vec{A} d\vec{l} = \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad \triangleright \quad A 2r\pi = \begin{cases} Br^2\pi, & r \leq a \\ Ba^2\pi, & r \geq a \end{cases} \quad \triangleright \quad A = \begin{cases} B \frac{r}{2}, & r \leq a \\ B \frac{a^2}{2r}, & r \geq a \end{cases}$$

Polje magnetnog vektor potencijala uvek liči na magnetno polje. Tako je i u ovom slučaju. U dobijeni izraz treba još uvrstiti izraz za magnetno polje, koji se dobija primenom *Ampèreovog* zakona, i sve napisati u vektorskom obliku.

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 NI}{2L} r \hat{\theta}, & r \leq a \\ \frac{\mu_0 NI}{2L} \frac{a^2}{r} \hat{\theta}, & r \geq a \end{cases}$$

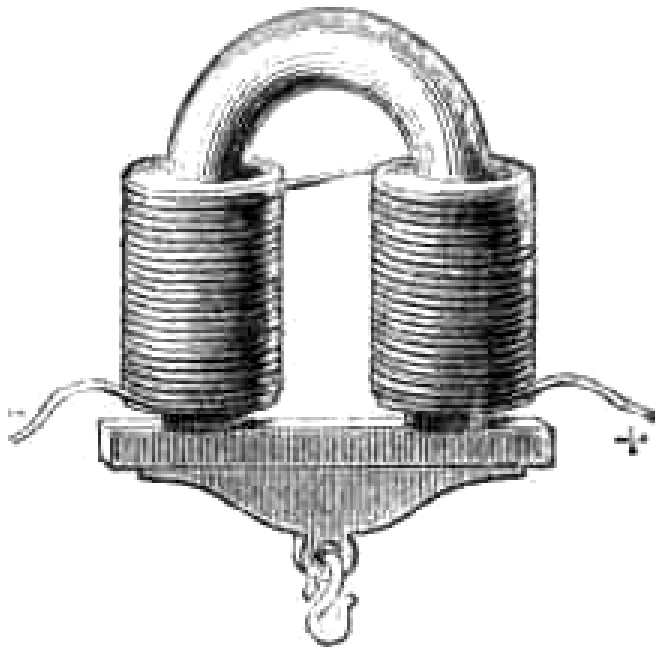
Na kraju ostaje provera rezultata.

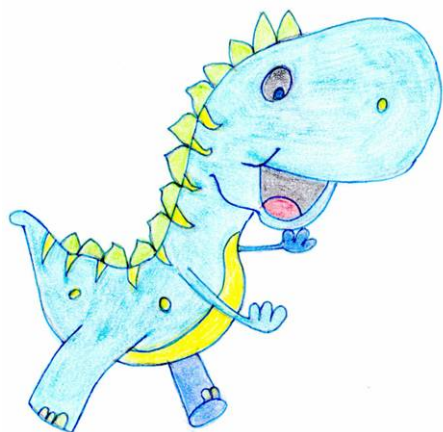
Da li je funkcija neprekidna ?
Da li rotor daje magnetno polje ?
Da li je divergencija jednaka nuli ?

$$\begin{aligned} \checkmark \quad A(r=a-) &= A(r=a+) \\ \checkmark \quad \text{rot } \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \hat{z} = B \hat{z} \\ \checkmark \quad \text{div } \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}$$

Q.E.D.

MAGNETNO POLJE U MATERIJI





Mirjana Rađić, 2016

46. Magnetno polje u materiji - magnetizacija

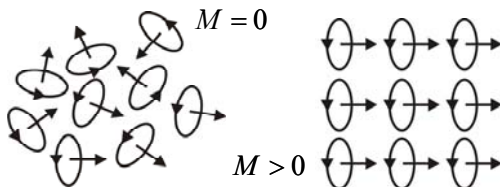
Sve materije su podložne magnećenju, mada se efekti magnećenja kvantitativno razlikuju od materije do materije. Svojim prisustvom materije menjaju strukturu i jačinu polja u koje su unete. Kod većine materija magnećenje nestaje sa nestankom primarnog polja, ali postoji grupa materija kod kojih magnećenje ostaje i posle nestanka primarnog polja, a neke čak mogu i same da stvaraju polje.

Prema današnjem shvatanju magnećenje materije je posledica postojanja magnetnih momenata u atomima i grupama atoma (molekuli) gde su elektroni i jezgra atoma nosici naelektrisanja u pokretu. Protoni imaju magnetni moment, ali je on znatno manji od magnetnog momenta elektrona. Elektroni u atomu vrše složeno kretanje koje se može opisati obrtanjem elektrona oko sopstvene ose, odakle potiče magnetni moment spina (lekcija 10) i kretanjem po orbiti oko jezgra, odakle potiče orbitni magnetni moment (lekcija 6). Makroskopski gledano, sve elementarne magnetne momente je moguće pripisati elementarnim mikro strujama koje teku u materiji obrazujući mnoštvo elementarnih strunih kontura.

Ampère je prvi pretpostavio postojanje ovakvih struja koje su zato nazvane *Ampèreeve* mikrostruje. Hipoteza o mikrostrujama je postavljena znatno pre otkrića elektrona, a u to doba nije bilo moguće objasniti održavanje ovih struja bez utroška spoljašnje energije.

U odsustvu spoljašnjeg magnetnog polja magnetni momenti elementarnih strujnih kontura su orijentisani u svim pravcima tako da se ne primećuju bilo kakvi makroskopski efekti (izuzev kod stalnih magneta). Međutim, kad se materija unese u strano polje, zbog dejstva elektromagnetnih sila, elementarne strujne konture teže da se postave u položaj pri kome će se pravci i smerovi vektora magnetnog polja mikro i makro struja podudariti.

Zbog termičkog kretanja uređivanje elementarnih strujnih kontura nije potpuno, ali je makroskopski efekat različit od nule.



Makroskopska veličina kojom se karakteriše namagnećenost ili nenamagnećenost materije je zapreminska gustina magnetnih momenata ili vektor magnetizacije. Jedinica za ovu makroskopsku veličinu se dobija iz definicije magnetnog momenta.

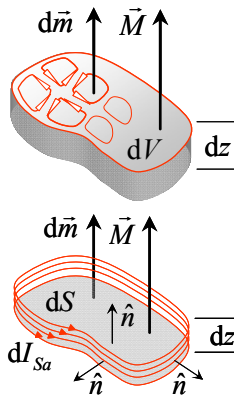
$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{m}$$

$$[M] = \frac{\text{Am}^2}{\text{m}^3} = \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

47. Vezane struje

Kad je materija namagnetisana zapreminska gustina magnetnog momenta je veća od nule i deo zapremine ima određeni magnetni moment. Elementarni magnetni dipoli potiču od elementarnih strujnih kontura.

- Ako je namagnetisavanje homogeno, magnetizacija je u svim tačkama dela zapremine ista i jačine struja elementarnih kontura su jednake. Može da se uoči da se struje u susednim stranicama kontura međusobno poništavaju. Konture na granicama zapreminine nemaju odgovarajuće susede koji bi poništili struju u graničnoj stranici. Deo zapremine je u magnetnom smislu ekvivalentan površinskoj struji, oblika trake, koja teče samo po obodu. Mnoštvo elementarnih strujnih kontura se može zameniti jednom konturom i odgovarajućim magnetnim dipolnim momentom.



$$d\vec{m} = \vec{M} dV, \quad d\vec{m} = \vec{M} d\vec{S} dz, \quad d\vec{m} = dI_{Sa} d\vec{S}$$

$$\triangleright dI_{Sa} = \vec{M} dz$$

Jačina i podužna gustina nastale površinske struje se dobijaju izjednačavanjem dva izraza za magnetni moment strujne konture .

$$J_{Sa} = dI_{Sa} / dz$$

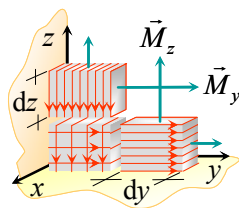
$$J_{Sa} = M$$

Za vektorski oblik se uobičajeno koristi jedinični vektor spoljašnje normale na površinu.

$$\vec{J}_{Sa} = \vec{M} \times \hat{n}$$

Iz vektorskog zapisa je jasno da ove struje ne teku po osnovama elementarne zapremine gde su magnetizacija i jedinična normala paralelni vektori i gde je njihov vektorski proizvod jednak nuli. Pomalo je neobično što u ovom slučaju ni jedno pojedinačno naelektrisanje ne obiđe celu konturu. Naprotiv, svako naelektrisanje ima svoju zatvorenu putanju unutar atoma, a sva naelektrisanja zajedno, deo po deo, formiraju makroskopsku struju koja teče po površini namagnetisanog tela.

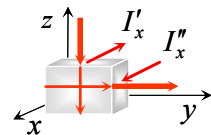
- Ako namagnetisavanje nije homogeno, tada se magnetizacija menja od tačke do tačke. Zbog razlike u magnetizaciji, koja postoji između dva susedna elementarna dela zapremine, struje elementarnih kontura se neće u potpunosti poništavati. Javiće se struje unutar zapremine.



Neka se magnetizacija povećava u y -pravcu i z -pravcu. Na graničnim površinama normalnim na te pravce pojavljuju se struje tako da jednačina kontinuiteta (*Kirchhoffov zakon*) bude zadovoljena.

Prema formuli za jačinu površinske struje u slučaju homogene magnetizacije je

$$dI''_{xa} = dM_z dz \quad \text{ i } \quad -dI'_{xa} = dM_y dy.$$



Ovde se umesto konstantnog vektora magnetizacije koristi pritaštaj koji nastaje od jedne do druge elementarne zapremine po pravcu y -ose, odnosno po pravcu z -ose.

$$dI''_{xa} = (M_z(y+dy) - M_z(y)) dz = \frac{M_z(y+dy) - M_z(y)}{dy} dz dy = \frac{\partial M_z}{\partial y} dz dy$$

$$-dI'_{xa} = (M_y(z+dz) - M_y(z)) dy = \frac{M_y(z+dz) - M_y(z)}{dz} dy dz = \frac{\partial M_y}{\partial z} dy dz$$

Zbir dobijena dva doprinosa daje jačinu struje koja teče u pravcu x -ose, tj. normalno na elementarnu površinu koju grade priraštaji nezavisno promeljivih po kojima se magnetizacija menja. Odatle se dobija jedna komponenta gustine struje.

$$I_{xa} = \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) dz dy$$

$$J_{xa} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

Za ukupnu struju postupak treba ponoviti za još dve komponente J_{ya} i J_{za} .



$$\vec{J}_a = \text{rot } \vec{M}$$

Ova struja zadovoljava jednačinu kontinuiteta, jer je divergencija rotora uvek jednaka nuli. Prostorni izvod (rotor) je jednak nuli kad je magnetizacija homogena (konstantna u prostoru), pa u materiji ostaju samo površinski vezane struje.

Magnetno polje koje stvaraju slobodne tj. makroskopske struje u prisustvu materije može da se analizira kao polje u vakuumu koje je nastalo istovremenim dejstvom makroskopskih struja i vezanih struja. Vezane struje (kao vezana naelektrisanja u elektrostatici) je termin koji stalno treba da podseća da se radi o *Ampère*ovim mikrostrujama koje stvaraju magnetno polje po istim zakonima kao i makrostruje ili slobodne struje.

$$d\vec{m} = \vec{M} dV \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \vec{m} \times \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M} \times \vec{R}}{R^3} dV$$



$$\vec{M} = \int_V \vec{m} dV \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{R} dV \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_a}{R} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_{Sa}}{R} dS$$



$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$



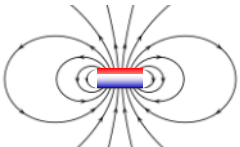
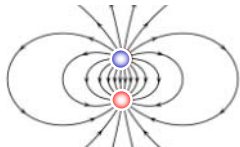
$$\vec{J}_a = \text{rot } \vec{M}$$



$$\vec{J}_{Sa} = \vec{M} \times \hat{n}$$

48. Analogija između magnetnog i električnog dipola

U elektrostatičkom polju uticaj materije je zamenjivan elementarnim električnim dipolima (Sveska I), što je analogno prikazanom postupku. Do izvedenih izraza za vezane struje može da se dođe i strogo matematičkim putem, preuređivanjem integrala za magnetni vektor potencijal. Puno lepe matematike nije dovoljan razlog da ovo izvođenje bude prikazano. Fizički zasnovano izvođenje je sasvim dovoljno.

Magnetostatika	Elektostatika
Magnetni moment $\vec{m} = I \vec{S}$	Električni moment $\vec{p} = q\vec{d}$
Magnetni vektor potencijal $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}$ $A_\varphi = \frac{\mu_0 I a^2 \pi}{4\pi r^2} \sin \theta$ $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$	Električni skalar potencijal $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3}$ $\varphi = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$ $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$
Magnetno polje dipola $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{R^3} [3(\vec{m} \hat{R})\hat{R} - \vec{m}]$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$ $d\vec{m} = \vec{M} dV$	Električno polje dipola $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} [3(\vec{p} \hat{R})\hat{R} - \vec{p}]$ $\vec{E} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$ $d\vec{p} = \vec{P} dV$
Vektor magnetizacije $\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{m}$	Vektor polarizacije $\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}$
Vezane struje $\vec{J}_a = \text{rot } \vec{M}$ $\vec{J}_{sa} = \vec{M} \times \hat{n}$ $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{M} \times \vec{R}}{R^3} dV'$	Vezana naelektrisanja $\rho_v = -\text{div } \vec{P}$ $\eta_v = \vec{D} \cdot \hat{n}$ $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} dV'$
	

49. Uopšteni Ampèreov zakon i magnetizaciono polje

Makrostruje podrazumevaju prenos slobodnih naelektrisanja, pa se često koristi naziv slobodne struje. Mikrostruje potiču od namagnetisanosti materije i rezultat su uređivanja elementarnih magnetnih dipola, pa se nazivaju vezane struje. Magnetno polje ravnopravno potiče od svih struja. U tom svetlu u izraz za Ampèreov zakon treba dodati jačine, odnosno gustine mikrostruja.

Homogeno namagnetisana materija	⇓	Nehomogeno namagnetisana materija
$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum (I + I_{sa})$ $\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I + \mu_0 \oint_C \vec{M} d\vec{l}$ $\oint_C \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) d\vec{l} = \sum I$ Uopšteni Ampèreov zakon u integralnom obliku $\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \sum I$		$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \vec{J} + \vec{J}_a$ $\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \vec{J} + \text{rot } \vec{M}$ $\text{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}$ Uopšteni Ampèreov zakon u diferencijalnom obliku $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$

Ovde je uveden novi vektor koji je *Maxwell* označio sa $\vec{H}$ (lekcija 1). Vektor je nazvan magnetizaciono polje (jačina magnetnog polja, prilog A).

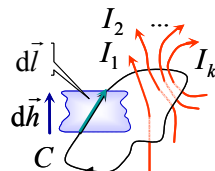
Prekookeanski istraživači su (kao i uvek) bili zaslužni za unošenje zabune kad su ovaj vektor nazvali magnetno polje. Tada su morali da izmisle drugi naziv za vektor $\vec{B}$. Tako su nastali termini kao gustina magnetnog fluksa ili još gore vektor magnetne indukcije, posebno što termin magnetna indukcija ima sasvim drugo značenje u elektromagnetici.

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$[H] = \frac{A}{m}$$

Magnetizaciono polje potiče isključivo od slobodnih tj. makroskopskih struja i zato kontura integraljenja može da prolazi kroz površine diskontinuiteta. Uopšteni Ampèreov zakon je primenljiv na homogeno i nehomogeno namagnetisane sredine.



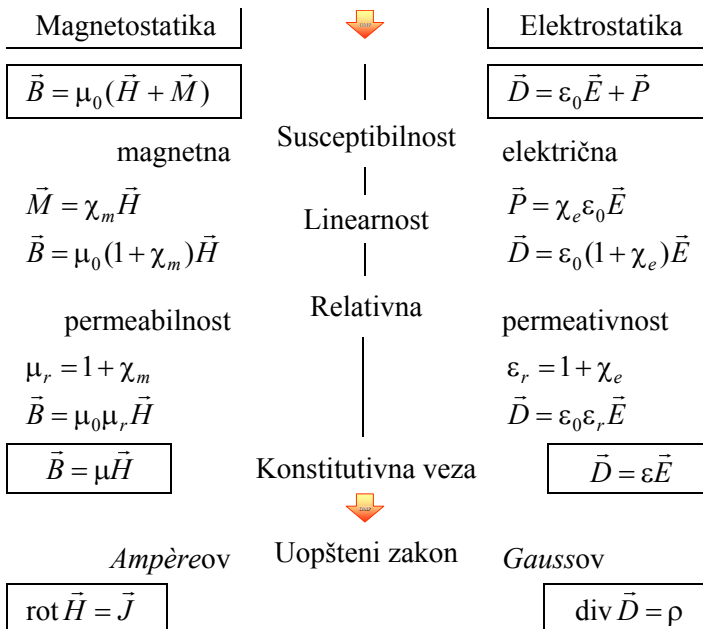
50. Linearne magnetne sredine

Na prvi pogled zapis uoštenog *Ampèreovog* zakona je isti kao i zapis originalnog zakona, samo što je uvedena smena $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Međutim, u opštem slučaju ova dva polja nisu kolinearna.

Rotor - <i>Ampèreov</i> zakon	
$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$
Divergencija - izvornost polja	
$\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{M}$

To se odmah vidi iz izraza za divergenciju ova dva polja. Pomenutom smenom bi se dobilo da je divergencija magnetizacionog polja jednaka nuli, što nije tačno. Samo kad je divergencija vektora magnetizacije jednaka nuli vektori magnetnog i magnetizacionog polja su kolinearni. U vakuumu je $M = 0$ pa je $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, kao što je u elektrostatici $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$.

Kod većine materijala magnetizaciju održava strano magnetno polje. Po prestanku delovanja polja, magnetizacija iščezava. Tačnije, magnetizacija je direktno proporcionalna jačini magnetnog polja, $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$. Ovakvi materijali su linearni. Koeficijent proporcionalnosti χ_m je magnetna susceptibilnost. Kao što se u elektrostatici uvodi relativna permeativnost, tako se ovde uvodi relativna permeabilnost, koja je kao i magnetna susceptibilnost bezdimenziona veličina.



Iz osnovnih jednačina za polja u linearnim sredinama bez slobodnih struja i naelektrisanja

$$J = 0 \quad \text{ i } \quad \rho = 0$$

uočava se paralela između električnih i magnetnih veličina.

Magnetostatika

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{0}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Elektrostatika

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

Tako se dobija sledeća transkripcija:

$\vec{B} \leftrightarrow \vec{D}$	$\vec{H} \leftrightarrow \vec{E}$	$\vec{P} \leftrightarrow \mu_0 \vec{M}$	$\mu_0 \leftrightarrow \epsilon_0$	$\chi_m \leftrightarrow \chi_e$
-----------------------------------	-----------------------------------	---	------------------------------------	---------------------------------

51. Homogeno namagnetisana sfera

Određivanje magnetnog polja homogeno namagnetisane sfere ($M = \text{const.}$) ili električnog polja homogeno polarisane sfere ($P = \text{const.}$) su matematički složeni problemi. Vezane struje tj. vezana naelektrisanja nemaju homogenu raspodelu po površini sfere, što otežava primenu osnovnih zakona u integralnom obliku.

Namagnetisana sfera

$$\vec{J}_a = \operatorname{rot} \vec{M} = \vec{0}$$

$$\vec{J}_{Sa} = \vec{M} \times \hat{n} = M \sin \theta \hat{\phi}$$

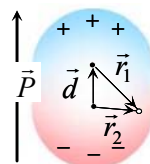
Polarisana sfera

$$\rho_v = -\operatorname{div} \vec{P} = 0$$

$$\eta_v = \vec{P} \cdot \hat{n} = P \cos \theta$$

Ipak, kad se radi o određivanju polja u unutrašnjosti sfere do rešenja se može doći na jednostavan način. Uniformno polarisana sfera se može predstaviti pomoću dve zapreminske gustine naelektrisanja. Bez polarizacije dejstvo naelektrisanja je kompletno poništeno.

Kad je materijal polarisan sva pozitivna naelektrisanja se malo pomere u pravcu polarizacije, a sva negativna u suprotnom pravcu. Dve sfere se više ne preklapaju u potpunosti. Naelektrisanja na sfernim kapama su zapravo vezana površinska naelektrisanja.



U oblasti preklapanja, $r_1, r_2 \leq a$, električno polje nastaje superponirajućim delovanjem dve homogeno naelektrisane sfere.

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{a^3} = -\frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^3} = -\frac{\vec{P}V}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^3} = -\frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi a^3}{3a^3} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$$

Magnetno polje se dobija upotrebom gore navedene transkripcije.

$$\vec{E} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = -\frac{1}{3\mu_0} \mu_0 \vec{M} = -\frac{1}{3} \vec{M}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \frac{2}{3} \vec{P} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$$

52. Vezane struje u pravom provodniku

Za primenu uopštenog *Ampèreovog* zakona formira se zamišljena kontura baš kao i kod originalnog oblika. Kroz prvolinijski provodnik neograničene dužine i poluprečnika a , koji se nalazi u slobodnom prostoru, protiče uniformno raspodeljena stalna struja jačine I . Zamišljena kružna kontura poluprečnika r ima centar na osi provodnika.

Uopšteni oblik *Ampèreovog* zakona (lekcija 49)

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J} d\vec{S}$$

primenjen na kružnicu $r \leq a$, a zatim i $r \geq a$ (lekcija 22).

Magnetizacija je direktno srazmerna magnetizacionom polju jer je provodnik načinjen od linearnog materijala (lekcija 50),

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}.$$

Van provodnika je $\chi_m = 0$.

Magnetizacionom polju je direktno srazmerno i magnetno polje,

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H},$$

što daje poznat rezultat (lekcija 22).

Gustine vezanih struja se dobijaju pomoću ranije izvedenih formula (lekcija 47). Potrebno odrediti rotor vektora magnetizacije (lekcija 49) u polarno-cilindričnim koordinatama,

$$\text{rot}(\vec{r}\hat{\theta}) = 2\hat{z}.$$

Konačno se dobija ukupna jačina vezane struje.

$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \hat{\theta}, & r \leq a \\ \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta}, & r \geq a \end{cases}$$

$$\vec{M} = \begin{cases} \frac{\chi_m I}{2\pi} \frac{r}{a^2} \hat{\theta}, & r \leq a \\ \vec{0}, & r \geq a \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 (1 + \chi_m) I}{2\pi r} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \hat{\theta}, & r \leq a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}, & r \geq a \end{cases}$$

$$\vec{J}_a = \text{rot} \vec{M} = \frac{\chi_m I}{\pi a^2} \hat{z}$$

$$\vec{J}_{Sa} = \vec{M} \times \hat{n} = -\frac{\chi_m I}{2\pi a} \hat{z}$$

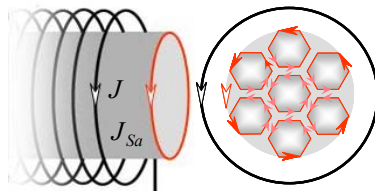
$$I_a = J_a a^2 \pi + J_{Sa} 2a\pi = 0$$

U unutrašnjosti provodnika magnetno polje je srazmerno permeabilnosti materijala μ . Međutim, susceptibilnost je veoma mala veličina, $|\chi_m| \ll 1$, pa je vrlo tačno ako se za provodnike usvoji $\mu \approx \mu_0$ (lekcija 22), osim ako se ne radi o grupi materijala koji su poznati kao feromagnetici.

53. Magnetno polje solenoida - elektromagnet

Uticaj *Ampère*ovih mikrostruja u homogeno namagnetisanoj materiji se svodi na uticaj površinskih struja, jer je

$$M = \text{const.} \Rightarrow \text{rot } \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow J_a = 0.$$



Neka se u unutrašnjosti veoma dugog solenoida nalazi cilindrično jezgro. Magnetizaciono polje dugog solenoida ($L \gg a$) bez jezgra (lekcija 38) se dobija primenom *Ampère*ovog zakona.

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = NI \quad \triangleright \quad H = \frac{NI}{L}$$

U izrazu za polje se pojavljuje jačina struje pomnožena brojem zavojsa po jedinici dužine solenoida, što je u krajnjem zapravo podužna gustina makroskopske struje. Odavde sledi da je

$$B_{\text{makro}} = \mu_0 H = \frac{\mu_0 NI}{L} \quad \triangleright \quad B_{\text{makro}} = \mu_0 J_S, \quad J_S = \frac{NI}{L}$$

Ovo magnetno polje uređuje elementarne magnete momente u materijalu jezgra i pojavljuje se makroskopski efekat u vidu magnetizacije. Vektor magnetizacije je paralelan osi solenoida i u svim tačkama ima istu vrednost. Osim kod posebne grupe materijala (feromagnetici), linije polja vektora magnetizacije u svenu liče na linije magnetnog polja. Dejstva mikrostruja u susednim domenima u unutrašnjosti jezgra se međusobno potiru i ostaje samo struja po površini jezgra. Ova površinska struja takođe stvara magnetno polje.

$$J_{Sa} = |\vec{M} \times \hat{n}| = M \quad \triangleright \quad B_{\text{mikro}} = \mu_0 J_{Sa}$$

Ukupno magnetno polje je zbir magnetnih polja nastalih od svake od struja posebno. Uopšte, magnetno polje može da se izračunava kao polje u vakuumu nastalo jednovremenim delovanjem makro i mikrostruja.

$$B = B_{\text{makro}} + B_{\text{mikro}} = \mu_0 (J_S + J_{Sa}) = \mu_0 \left(\frac{NI}{L} + M \right),$$

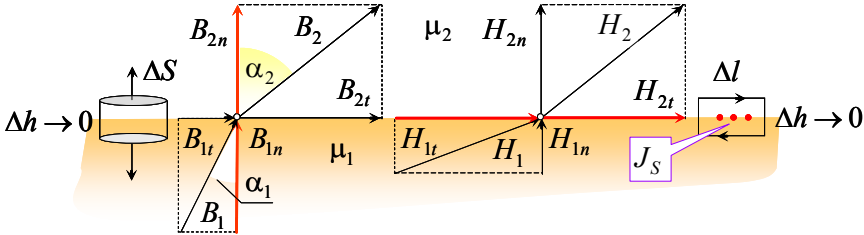
odnosno,

$$B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 (H + \chi_m H) = \mu_0 (1 + \chi_m) H = \mu_0 \mu_r H = \mu H.$$

Ako je $\chi_m > 0$ (paramagnetici) ukupno polje biće pojačano, a ako je $\chi_m < 0$ ukupno polje biće oslabljeno (diamagnetici).

54. Granični uslovi

Granične uslove za magnetno polje na razdvojnoj površini dva magnetika je moguće izvesti iz opštih zakona, kao što je to urađeno za granične uslove u elektrostatičkom ili stacionarnom strujnom polju.



Kad se zakon o konzervaciji magnetnog fluksa primeni za elementarnu zatvorenu površinu oblika valjka, čije su osnovice paralelne razdvojnoj površini i čija visina teži nuli, dobija se da su normalne komponente magnetnog polja sa obe strane razdvojne površine međusobno jednake.

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \triangleright \quad B_1 \Delta S_1 - B_2 \Delta S_2 = 0 \quad \triangleright \quad \boxed{B_{1n} - B_{2n} = 0}$$

Veza između tangencijalnih komponenti vektora magnetizacionog polja se dobija primenom *Ampèreovog* zakona na elementarnu zatvorenu konturu oblika pravougaonika čije su dve stranice paralelne razdvojnoj površini i čija visina teži nuli.

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J} d\vec{S} \quad \triangleright \quad H_{1t} \Delta l - H_{2t} \Delta l = J \Delta l \Delta h \quad \triangleright \quad \boxed{H_{1t} - H_{2t} = J_S}$$

Pošto je fluks magnetnog polja kroz površinu koja je ograničena konturom čija visina teži nuli jednak nuli, to na osnovu definicije magnetnog vektor potencijala (lekcija 39) sledi da su tangencijalne komponente jednake.

$$\oint_C \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \Phi, \quad \triangleright \quad \boxed{A_{1t} - A_{2t} = 0}$$

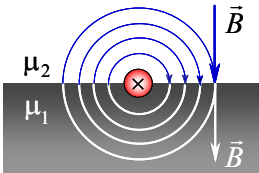
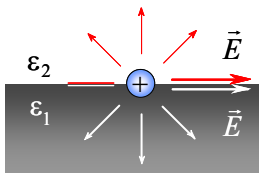
U magnetostatici je divergencija magnetnog vektor potencijala jednaka nuli, pa odatle sledi da su i normalne komponente ovog vektora jednake.

$$\int_V \text{div } \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} d\vec{S} = 0 \quad \triangleright \quad \boxed{A_{1n} - A_{2n} = 0}$$

Ako po razdvojnoj površini ne teku površinske struje i ako su obe sredine linearne dobijaju se veze između preostalih komponenti polja.

$$\begin{aligned} J_S = 0 \\ B = \mu H \end{aligned} \quad \triangleright \quad \begin{aligned} \mu_1 H_{1n} &= \mu_2 H_{2n} \\ \mu_1 B_{2t} &= \mu_2 B_{1t} \end{aligned} \quad \triangleright \quad \boxed{\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

Za ilustraciju primene graničnih uslova najbolji je primer neograničenog provodnika sa stalnom strujom koji leži na samoj razdvojnoj površini dva magnetna materijala. Kao i ranije, treba zočiti analogiju koja postoji sa odgovarajućim elektrostatičkim problemom.

Magnetostatika		Elektrostatika
		
Koncentrične kružnice	Linije polja	Radijalni zraci
Na graničnoj površini postoje samo normalne komponente		tangencijalne komponente
$B_{1n} = B_{2n}$		$E_{1t} = E_{2t}$
$B_1 = B_2$		$E_1 = E_2$
$\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2$		$\epsilon_2 D_1 = \epsilon_1 D_2$
Uopšteni zakon <i>Ampèreov</i>		Uopšteni zakon <i>Gaussov</i>
$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = I$		$\oint_C \vec{D} d\vec{S} = q$
$H_1 \pi r + H_2 \pi r = I$		$D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = q$
$H_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_1$		$D_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_1$
$H_1 \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \pi r = I$		$D_1 \left(1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) 2\pi r^2 = q$
$H_1 = \frac{\mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \frac{I}{r}$		$D_1 = \frac{\epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{r^2}$
$H_2 = \frac{\mu_1}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \frac{I}{r}$		$D_2 = \frac{\epsilon_2}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{r^2}$
$B = \frac{\mu_1 \mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \frac{I}{r}$		$E = \frac{1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{r^2}$
Ako je $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$		Ako je $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$
$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$		$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$

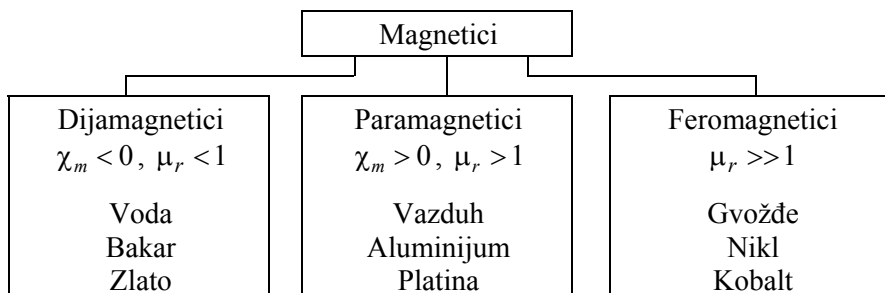
55. Dijamagnetici, paramagnetici i feromagnetici

Za razliku od električne polarizacije, koja je uvek istog smera kao i spoljašnje električno polje, magnetna polarizacija tj. magnetizacija može biti istog ili suprotnog smera u odnosu na spoljašnje magnetno polje.

Materijali kod kojih se indukuju magnetni dipolni momenti suprotnog smera u odnosu na spoljašnje polje imaju negativnu susceptibilnost (lekcija 50) i to su dijamagnetni materijali (Grk: $\delta\alpha$ - kroz, popreko). Sam termin potiče iz vremena prvih eksperimenata, kad je primećeno da se uzorak materijala oblika štapa okreće poprečno u odnosu na pravac polja. Dijamagnetizam je posledica uređivanja atomskih orbita (lekcija 24) i važi za sve atome, samo što je kod nekih materijala ovaj efekat zamaskiran znatno snažnijim efektom koji je nazvan paramagnetizam.

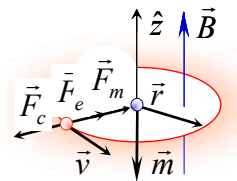
Materijali sa pozitivnom magnetnom susceptibilnošću su paramagnetici (Grk: $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}$ - pored, blizu, kao). Elementarni magnetni dipoli se u stranom magnetnom polju postavljaju paralelno sa poljem. Paramagnetizam je posledica uređivanja magnetnih momenata spina (lekcija 10). Kako je magnetni moment spina lakše zaokrenuti nego magnetni moment cele orbite ovaj efekat je snažniji od dijamagnetizma. Svaki elektron je magnetni dipol za sebe i trebalo bi očekivati da je i paramagnetizam univerzalna pojava. Međutim, elektroni u atomima su uvek u parovima sa suprotnim spinovima (princip isključenja), pa je magnetni moment takve kombinacije neutralisan. Zato se paramagnetizam pojavljuje samo u atomima (molekulima) sa neparnim brojem elektrona. Dijamagnetizam je, iz istog razloga, i pored toga što uvek postoji, primetan samo kod atoma sa parnim brojem elektrona.

Svega nekoliko supstanci, od kojih je najpoznatije gvožđe, čini grupu feromagnetika (Lat: *ferrum* - gvožđe). Ove supstance zadržavaju magnetizaciju i po prestanku delovanja spoljašnjeg polja. Šta više, magnetizacija feromagnetika je određena istorijom magnećenja, a ne trenutnom vrednošću polja. Stalni magneti su tipičan primer (prilog C).



56. Magnetna susceptibilnost dijamagnetika

Na elektron, koji oko jezgra kruži po orbiti poluprečnika r , deluje centripetalna sila koja je uravnotežena sa privlačnom električnom silom. Kad se atom nalazi u stranom magnetnom polju dodatno se pojavljuje i magnetna sila. Neka je pravac magnetnog polja upravan na orbitu.



Magnetna sila je u pravcu koji spaja elektron i jezgro, a smer zavisi od smera stranog magnetnog polja i od smera rotacije elektrona. Prema smerovima sa slike magnetna sila je usmerena kao i električna (lekcija 11).

Da bi elektron ostao na svojoj orbiti centripetalna sila mora biti veća, a to znači da će elektron ubrzati kretanje. Promena brzine dovodi i do promene orbitalnog dipolnog magnetnog momenta elektrona (lekcija 6).

$B = 0$	$B > 0$
$F_c = F_e$	$F_c = F_e + F_m$
$m_e \frac{v_0^2}{r} = F_e$	$m_e \frac{v_1^2}{r} = F_e + ev_1 B$
$\vec{m}_0 = -\frac{e}{2} r v_0 \hat{z}$	$\vec{m}_1 = -\frac{e}{2} r v_1 \hat{z}$

Promena brzine $v_1 - v_0 > 0$ je mala (tako da je $v_1 + v_0 \approx 2v_1$) i može da se odredi oduzimanjem jednačina ravnoteže.

$$ev_1 B = \frac{m_e}{r} (v_1^2 - v_0^2) = \frac{m_e}{r} 2v_1 (v_1 - v_0) \quad \triangleright \quad v_1 - v_0 = \frac{er}{2m_e} B.$$

Promena dipolnog momenta, koja zapravo prouzrokuje magnetizaciju, se dobija oduzimanjem odgovarajućih izraza, i očigledno je suprotnog smera od smera stranog magnetnog polja,

$$\vec{m}_1 - \vec{m}_0 = -\frac{e}{2} r (v_1 - v_0) \hat{z} \quad \triangleright \quad \vec{m}_1 - \vec{m}_0 = -\frac{e^2 r^2}{4m_e} \vec{B}.$$

Za drugi smer rotacije elektrona magnetni moment bio bi orijentisan suprotno. Magnetna sila bi takođe imala suprotan smer. Da bi elektron ostao na orbiti, centripetalna sila mora biti manja, tj. elektron će usporiti svoje obrtanje, $v_1 - v_0 < 0$, i promena dipolnog momenta će ponovo biti suprotnog smera od smera stranog magnetnog polja.

Konačno, sada je moguće odrediti magnetnu susceptibilnost (lekcija 50),

$$\chi_m = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0}{B} M = \frac{\mu_0}{B} \frac{\vec{m}_1 - \vec{m}_0}{V} = -\frac{3\mu_0}{16\pi} \frac{e^2}{m_e r}.$$

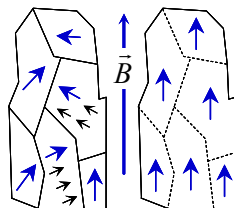
Na primer, za zlato je $r = 135 \text{ pm}$, pa sledi da je $\chi_m = -1.57 \cdot 10^{-5}$, što je iznenađujuće tačno (tipična vrednost za dijamagnetike) jer je rezultat dobijen metodama klasične elektromagnetike.

57. Feromagnetici

Kod dijamagnetika i paramagnetika elementarni dipoli su u uređenom poretku dok deluje strano magnetno polje. Feromagneticima nije potrebno strano magnetno polje da održe magnetizaciju. Uvek postoji neka uređenost dipola koja je od ranije zapamćena. Feromagnetizam, kao i paramagnetizam, počiva na uređivanju magnetnih momentata spina neuparenih elektrona. Međutim, kod feromagnetika postoji interakcija između susednih elementarnih dipola i to ih čini bitno drugačijim od paramagnetika. U okviru mikroskopski malih domena svaki elementarni dipol se orijentiše kao i njegov sused, ali sami domeni su raspoređeni haotično tako da se njihova magnetna polja poništavaju.

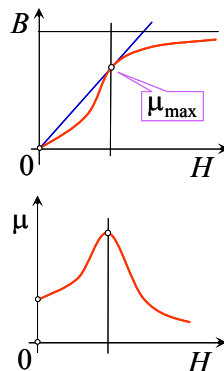
Neka je na samom početku materijal nenamagnetisan. Unošenjem materijala u strano magnetno polje počinje prvobitno magnećenje. Ovaj proces nije linearan i nije reverzibilan.

Težnji magnetnog polja da uredi dipole (lekcija 04) suprostavlja se težnja dipola da bude usmeren kao sused. Popuštaju prvo dipoli koji su skoro u pravcu polja. Na taj način granice domena se šire tj. raste broj domena orijentisanih u pravcu polja. Na kraju procesa magnetizacije samo jedan domen zauzima celu zapreminu.



Sa porastom magnetizacionog polja vrlo brzo raste i magnetno polje, ali samo do prevojne tačke. Nakon toga, porast vrednosti magnetnog polja je znatno usporen, postaje linearan i približava se graničnoj vrednosti. Granična vrednost odgovara zasićenju tj. pojavi da su svi elementarni magnetni momenti u materiji orijentisani u pravcu spoljašnjeg polja. Tada je magnetizacija maksimalna, $M = M_{\max}$.

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M_{\max} \quad \triangleright \quad B = \mu_0 H + \text{const}$$

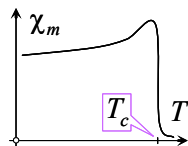


Magnetna permeabilnost feromagnetika nije konstantna veličina jer veza između vektora $\vec{M}$ i $\vec{H}$ nije linearna. Za svaku tačku na krivoj prvobitnog magnećenja magnetna permeabilnost ima drugu vrednost, pa se zato definiše diferencijalna magnetna permeabilnost μ_d . Prava koja dodiruje krivu magnećenja u prevojnoj tački dovodi do ideje da je, pri većem broju praktičnih proračuna, feromagnetike moguće linearizovati. Koeficijent pravca te prave je 'magnetna permeabilnost' μ .

58. Curieova temperatura

Feromagnetici imaju još jednu važnu karakteristiku. Magnetna permeabilnost feromagnetika zavisi od temperature. Naime, spontana paralelnost vektora magnetnih momenata svih atoma je osobina feromagnetika samo do određene temperature.

U oblasti spontane magnetizacije magnetna permeabilnost feromagnetika raste sa porastom temperature, dostiže maksimum i zatim naglo opada.



Kritičnu temperaturu je eksperimentalno odredio *Piere Curie* po kome je i nazvana *Curiejeva* temperatura. Iznad te temperature feromagnetik je paramagnetik.

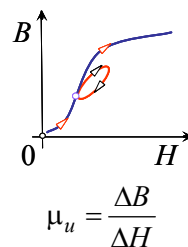
Metal	T_c [K]	T_p [K]
Gvožđe	1043	1808
Nikl	627	1728
Kobalt	1388	1768

Poređenjem *Curiejeve* temperature T_c sa temperaturom topljenja T_p dolazi se do zaključka da se usijano jezgro Zemlje ne ponaša kao feromagnetik.

59. Magnećenje feromagnetika

Ako se prilikom snimanja prvobitne krive magnećenja u jednom trenutku jačina spoljašnjeg polja smanji za ΔH , smanjiće se i jačina magnetnog polja za ΔB , ali neće imati prethodnu vrednost već nešto veću od očekivane. U stvari, zbog smanjenja jačine spoljašnjeg polja neće baš svi elementarni magnetni momenti, koji su ranije bili usmereni, ponovo zauzeti prethodni haotičan prostorni raspored. Materija je upamtila prethodno magnećenje. Jačine vektora $\vec{B}$ i $\vec{M}$ ne zavise samo od jačine vektora $\vec{H}$ u trenutku posmatranja, već i od istorije magnećenja. Ako se zatim jačina spoljašnjeg polja ponovo poveća za istu vrednost ΔH , povećaće se i jačina magnetnog polja ali za neko ΔB koje je vrlo malo različito od prethodnog.

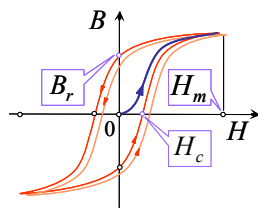
Na grafiku funkcije prvobitnog magnećenja primećuje se jedna petlja koja postaje zatvorena kad se ciklus smanjenje-povećanje ponovi više puta. Ova pojava se naziva histerezis (Grk: *histerezio* - kašnjenje). Koeficijent prave koja prolazi kroz vrhove ove petlje definiše reverzibilnu (Nlat: *reversibilis* - povratan) magnetnu permeabilnost.



60. Histerezis

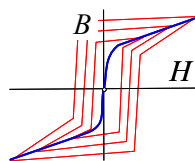
Ako posle dostizanja maksimalne magnetizacije, $M_{\max}$, magnetizaciono polje počne da opada od svog maksimuma $H_{\max}$ ka nuli, opadaće i magnetno polje, ali ne po krivoj prvobitnog magnećenja. Kad jačina magnetizacionog polja dostigne nultu vrednost, magnetno polje zadržava izvesnu vrednost B_r , koja je nazvana remanentna (ili rezidualna) magnetizacija (Lat: *remanens* - koji ostaje). To je zapravo magnetno polje koje pokazuju stalni magneti. Objašnjenje ove pojave je isto kao i objašnjenje pojave malog histerezisa na krivoj prvobitnog magnećenja. Dalje, magnetizaciono polje menja smer i postaje sve jače. Pri nekoj vrednosti polja elementarni magnetni momenti će statistički gledano ponovo biti u haotičnom prostornom rasporedu i remanentna magnetizacija će biti jednaka nuli. Magnetizaciono polje u toj tački je koercitivno polje, H_c (Nlat: *coercitivus* - prinudan, prisilan). Dalje povećavanje polja uređuje elementarne magnetne momente u tom smeru sve do postizanja novog zasićenja.

Kad jačina polja promeni smer i kroz nultu vrednost počne da raste, ceo proces se ponavlja, ali u suprotnom smeru. Tako se dobija skoro zatvorena kriva, koja postaje sasvim zatvorena ako se postupak ponovi više puta. Ova kriva je histerezisna petlja (kriva ili ciklus).



Na postojanju remanentne indukcije zasnivaju se svi magnetni zapisi, od magnetofonske trake do računarskih diskova. Međutim, presnimavanje podrazumeva prethodno razmagnećivanje feromagnetika. To se postiže obrnutim postupkom. Jačina magnetnog polja se od najveće vrednosti smanjuje i zatim povećava u suprotnom smeru. U nizu ciklusa najveća jačina magnetnog polja je uvek manja od prethodne.

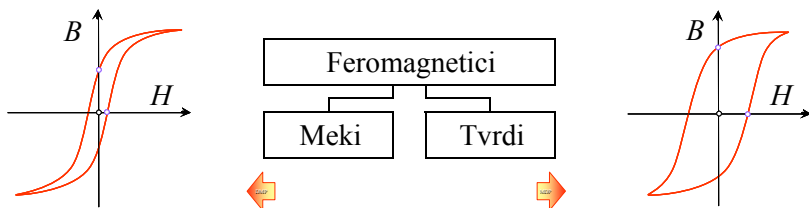
To dovodi do sve manjih i manjih histerezisnih petlji. Na kraju postupka i remanentna indukcija je jednaka nuli. Ako je u svakom ciklusu jačina magnetnog polja sve veća i veća, dolazi se do maksimalnog magnećenja tj. zasićenja.



Oblik svake od histerezisnih petlji zavisi od najveće jačine magnetnog polja za taj ciklus. Kad se vrhovi histerezisnih petlji spoje dobija se osnovna kriva magnećenja koja se malo razlikuje od krive prvobitnog magnećenja, međutim baš se ova kriva daje kao karakteristika feromagnetika. Podaci za remanentnu magnetizaciju i koercitivno polje uzimaju se na osnovu krive magnećenja u uslovima zasićenja materijala.

61. Podela feromagnetika

Na osnovu oblika histerezisne petlje feromagnetici su podeljeni u dve osnovne grupe.



Kod mekih feromagnetika histerezisna petlja je veoma uska, dok je kod tvrdih feromagnetika ova petlja široka, a posledično jačina koercitivnog polja je velika. Zbog svojih osobina, pre svega velike početne i velike maksimalne magnetne permeabilnosti, meki feromagnetici se koriste za gradnju električnih mašina i svih vrsta transformatora. U primeni feromagnetni materijali su izloženi stalnom naizmeničnom magnećenju što prouzrokuje dve vrste gubitaka i smanjenje efikasnosti električne mašine. Prvo, to su gubici usled histerezisa koji su proporcionalni površini histerezisne petlje, pa je poželjno da ova petlja bude što uža. Drugo, to su gubici usled vrtložnih struja pa je poželjno da feromagnetik ima što veću specifičnu otpornost. Najčešće se ovaj zahtev ostvaruje konstruktivno. U energetici se feromagnetna jezgra grade od tankih limova koji su međusobno izolovani, dok se u elektronici velika specifična otpornost postiže presovanjem feromagnetnog praha sa izolacionim vezivnim materijalom.

Materijal	Tvrdoća	μ_a / μ_0	B_r [T]	H_c [A/m]
Superperalloy*	mek	100000.0	0.6	0.4
Gvožđe	mek	25000.0	1.4	4.0
Čelik	tvrd	40.0	0.7	5000.0
Barijum-ferit	tvrd	1.0	0.2	250000.0

* 79%-Ni, 15%-Fe, 5%-Mo, 1%-Mn.

Sa druge strane, u proizvodnji stalnih (permanentnih) magneta i uređaja kod kojih se magnetno polje ne menja, karakteristike kao što su linearnost i velika specifična otpornost nemaju nikakav praktični značaj. Ovi materijali treba da imaju što veću remanentnu magnetnu indukciju, B_r , i što veću jačinu koercitivnog magnetnog polja, H_c . Proizvod ove dve veličine karakteriše kvalitet materijala za ove primene. Očigledno, ovaj uslov zadovoljavaju tvrdi feromagnetici.

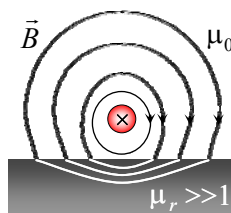
62. Teorema lika u ravnom feromagnetnom ogledalu

Poseban slučaj graničnih uslova (lekcija 54) je kad je jedna sredina feromagnetna, a druga nije. Magnetna permeabilnost feromagnetika je nelinearna funkcija magnetizacionog polja ali je uvek znatno veća od permeabilnosti vazduha. Na primer, neka je $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \mu_0$ i $\mu_1 \gg \mu_2$. Iz zakona prelamanja linija polja,

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu}{\mu_0} \rightarrow \infty,$$

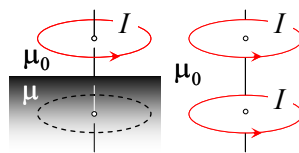
sledi da $\alpha_2 \rightarrow 0$ za sve uglove α_1 , mada je za $\alpha_1 \approx \pi/2$ zakon automatski zadovoljen. Linije polja u vazdušnom delu prostora će biti skoro normalne na razdvojnu površinu i zatvaraju se preko površine feromagnetika.

Paralelno sa ravni, koja razdvaja vazduh i feromagnetik, je postavljen neograničen prav provodnik kroz koji protiče stalna struja jačine I . Da nema feromagnetika linije polja bile bi koncentrični krugovi. U ovom slučaju linije polja se deformišu i skoro pod pravim uglom prodiru ravan razdvajanja.

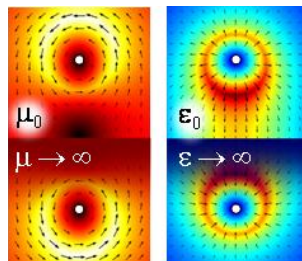


Međutim, isti oblik linija polja u vazdušnom delu prostora se dobija ako se feromagnetni materijal ukloni i simetrično sa razdvojnou površinom postavi još jedan provodnik kroz koji protiče struja iste jačine i istog smera kao u stvarnom provodniku. Problem se tako svodi na određivanje polja u okolini dve paralelne struje (lekcija 30).

- Zamena uticaja sredine uvođenjem novog provodnika je postupak poznat kao primena teoreme lika u ravnom ogledalu. Teorema je opšta i može da se primeni na bilo koju raspodelu struja u prostoru (lekcija 37).



- Teorema lika je poznata iz elektrostatičke (Sveska I). U elektrostatici se uticaj savršeno provodnog poluprostora na raspodelu polja u ostatku prostora svodi na uticaj negativnih likova (suprotno naelektrisana tela), a samo formalno se smatra da je relativna dielektrična konstanta provodne sredine mnogo veća od jedan (što nije tačno).



- U magnetostatici likovi su pozitivni, a relativna magnetna konstanta polu prostora je stvarno znatno veća od jedan.

63. Uopštenje teoreme lika

Dve homogene magnetne sredine μ_1 i μ_2 razdvojene su ravnom površinom i ispunjavaju ceo prostor. Paralelno razdvojnoj ravni u sredini μ_2 nalazi se prav provodnik kroz koji protiče stalna struja I .

Uticaj susedne sredine μ_1 na polje u sredini μ_2 moguće je zameniti strujom $I_1 = C_1 I$ kroz lik provodnika, ali je pri tome ceo prostor ispunjen materijalom μ_2 .

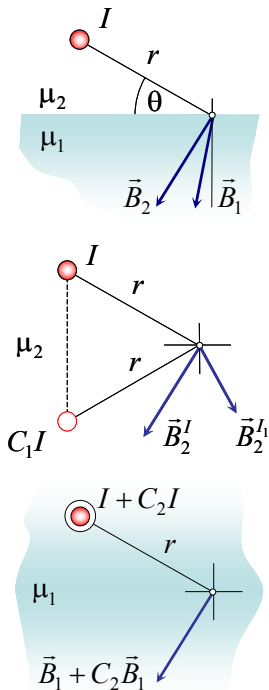
$$B_{2n} = \frac{\mu_2}{2\pi r} (1 + C_1) I \cos \theta$$

$$H_{2t} = \frac{1}{2\pi r} (1 - C_1) I \sin \theta$$

Uticaj sredine μ_2 na polje u sredini μ_1 moguće je zameniti dopunskom strujom kroz provodnik $I_2 = C_2 I$, ali je pri tome ceo prostor ispunjen materijalom μ_1 .

$$B_{1n} = \frac{\mu_1}{2\pi r} (1 + C_2) I \cos \theta$$

$$H_{1t} = \frac{1}{2\pi r} (1 + C_2) I \sin \theta$$



U tačkama na površini diskontinuiteta granični uslovi (lekcija 54) moraju biti zadovoljeni, te se odatle dobijaju vrednosti za nepoznate konstante.

$$\left. \begin{array}{ll} B_{1n} = B_{2n} & \rightarrow \mu_2(1 + C_1) = \mu_1(1 + C_2) \\ H_{1t} = H_{2t} & \rightarrow 1 - C_1 = 1 + C_2 \end{array} \right] \rightarrow C_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = -C_2.$$

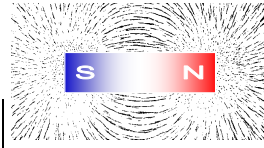
- U posebnom slučaju, kad se provodnik optican strujom nalazi u vazduhu iznad feromagnetne sredine, tada je $\mu_1 \gg \mu_2$ i $\mu_2 = \mu_0$, pa je $C_1 = 1$. Prema tome, polje u vazduhu je isto kao i polje struje i njenog pozitivnog lika koji kao da se nalazi u vazduhu (lekcija 62). U feromagnetiku polje ne postoji jer je $C_2 = -1$. Tačnije, linije polja se ipak zatvaraju kroz feromagnetik, ali kroz veoma tanak površinski sloj.

- Drugi poseban slučaj je $\mu_2 \gg \mu_1$, tj. $C_1 = -1$ i $C_2 = 1$. Polje u sredini gde je provodnik stvaraju struja i njen negativni lik. U ostalom delu prostora polje potiče od dvostruko jače struje na mestu provodnika.

64. Magnetni skalar potencijal i magnetne pseudomase

U odsustvu makroskopskih električnih struja polje namagnetisane materije je definisano generalisanim *Ampèreovim* zakonom,

$$\vec{J} = \vec{0} \quad \triangleright \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{0}$$



Oдавде sledi mogućnost da se jačina polja predstavi kao degradient skalarne funkcije φ_m , kao što je to urađeno u elektrostatici. Naime, rotor gradijenta bilo koje skalarne funkcije je jednak nuli. Ta funkcija je nazvana magnetni skalar potencijal. Polje vektora magnetnog polja je bezizvorno, pa sledi da su divergencije vektora magnetizacionog polja i vektora magnetizacije jednake po apsolutnim vrednostima, a suprotne po znaku. Ponovo po analogiji sa elektrostaticom, moguće je formalno uvesti pojam zapreminske gustine magnetne pseudomase ρ_m i od prvog izraza odrediti divergenciju. Tako se dobija *Poissonova* jednačina u magnetostatici čije rešenje je analogno rešenju za električni skalar potencijal u elektrostatici.

$$\vec{H} = -\text{grad } \varphi_m$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div}(\mu_0(\vec{H} + \vec{M})) = 0$$

$$\text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{M}$$

$$\text{div } \vec{H} = \rho_m$$

$$\text{div } \vec{M} = -\rho_m$$

$$\text{div}(\text{grad } \varphi_m) = -\rho_m$$

$$\Delta \varphi_m = -\rho_m$$

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m}{R} dV$$

Ako se relacija za divergenciju magnetizacionog polja integriše po zapremini koju magnet zauzima i ako se na integral divergencije primeni teorema *Gauss-Ostrogradskyog*, tada leva strana iskazuje fluks vektora magnetizacionog polja, a desna strana predstavlja magnetnu pseudomasu. Tako se dobija *Gaussov* zakon u magnetostatici koji je potpuna analogija sa odgovarajućim zakonom u elektrostatici.

Magnetostatika



Elektrostatika

Poissonova jednačina

$$\text{div}(\text{grad } \varphi_m) = -\rho_m$$

$$\text{div } \vec{H} = \rho_m$$

$$\int_V \text{div } \vec{H} dV = \int_V \rho_m dV$$



$$\oint_S \vec{H} d\vec{S} = q_m$$

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = -\rho / \epsilon$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

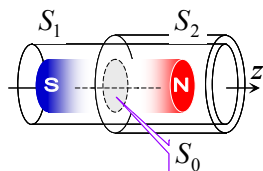
$$\int_V \text{div } \vec{D} dV = \int_V \rho dV$$



$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$$

Gaussov zakon

Neka je stalni magnet oblika štapa i neka zatvorena površina S_1 obuhvata ceo magnet. U slobodnom prostoru oko magnetu magnetizacija je jednaka nuli ($M = 0$) i algebarski zbir svih magnetnih pseudomasa je jednak nuli.



$$\oint_{S_1} \vec{H} d\vec{S} = q_m \quad \triangleright \quad \oint_{S_1} \vec{M} d\vec{S} = -q_m = 0 \quad \triangleright \quad q_m = 0$$

Primena *Gaussovog* zakona na zatvorenu površinu koja obuhvata magnetnu masu jednog pola omogućava da se fluks vektora magnetizacionog polja podeli na unutrašnji fluks tj. onaj kroz površinu koja preseca magnet i spoljašnji fluks tj. fluks kroz ostatak zatvorene površine.

$$q_m = \oint_{S_2} \vec{H} d\vec{S} = \int_{S_2 - S_0} \vec{H} d\vec{S} + \int_{S_0} \vec{H} d\vec{S} = \frac{\Phi}{\mu_0} + \int_{S_0} \vec{H} d\vec{S} \quad \triangleright \quad q_m = \frac{\Phi}{\mu_0} [\text{Am}]$$

Kod tankih magneta, $S_0 \rightarrow 0$, unutrašnji fluks je zanemarljivo mali, pa se merenjem spoljašnjeg fluksa približno može odrediti magnetna pseudomasa jednog pola. Međutim, upravo taj zanemareni sabirak pokazuje da u unutrašnjosti magneta postoje izvori (ponori) magnetizacionog polja.

Neka se zamišljena kontura podudara sa nekom od linija. Cirkulacija vektora magnetizacionog polja duž te konture je jednaka nuli, jer ne postoje makroskopske kondukcione struje. Kako je udeo spoljašnjeg dela konture pozitivan, to udeo dela konture kroz magnet mora biti negativan. U magnetu su magnetno i magnetizaciono polje suprotnih smerova. Linije ovog polja izviru iz severnog i uviru u južni magnetni pol.

Ponovo po analogiji sa elektrostatikom, dolazi se do izraza za magnetni skalar potencijal tačkaste magnetne pseudomase, a odatle i do *Coulombovog* zakona za magnetizam.

Magnetostatika	↕	Elektrostatika
$\varphi_m = \frac{q_m}{4\pi r}$		$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$
$\vec{H} = -\text{grad}\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \hat{r}$		$\vec{D} = -\epsilon \text{grad}\varphi = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \hat{r}$
$\vec{B} = \mu \vec{H} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \hat{r}$		$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{r}$
↕	Coulombov zakon	↕
$\vec{F}_m = q_m \vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{q_{m1} q_{m2}}{r^2} \hat{r}$		$\vec{F} = q \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$

65. Homogeno namagnetisan štap - stalni magnet

Cilindrični štap (lekcija 66) dužine L i poluprečnika a namagnetisan je u pravcu svoje ose, $\vec{M} = M \hat{z}$. Štap je usamljen u slobodnom prostoru, pa je van štapa magnetizacija jednaka nuli, $M = 0$. U štapu je magnetizacija konstantna i divergencija ovog vektora je jednaka nuli. To znači da su magnetne pseudomase raspoređene po površinama osnova i njihova površinska gustina se može odrediti iz Gaussovog zakona primenjenog na svaki pol posebno.

$$\oint_S \vec{M} \cdot d\vec{S} = - \int_S \eta_m dS \quad \triangleright \quad \eta_m = \begin{cases} M, & z = L/2 \\ -M, & z = -L/2 \end{cases}$$

Izraz za magnetni skalar potencijal se dobija iz opšteg rešenja *Poissonove* jednačine. Za tačke koje pripadaju osi štapa je

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\eta_m}{R} dS \quad \triangleright \quad \varphi_m = \frac{M}{4\pi} \left[\int_0^a \frac{2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + (z - L/2)^2}} - \int_0^a \frac{2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + (z + L/2)^2}} \right],$$

što nakon integracije daje

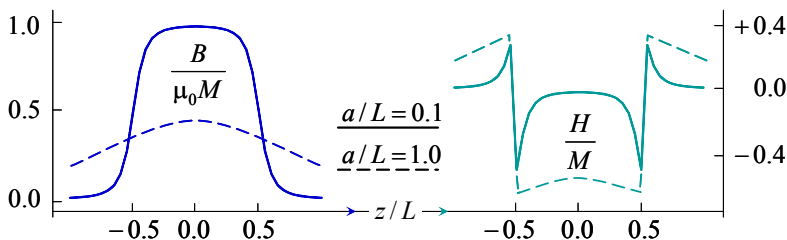
$$\varphi_m = \frac{M}{2} \left[\sqrt{a^2 + (z - L/2)^2} - |z - L/2| - \sqrt{a^2 + (z + L/2)^2} + |z + L/2| \right].$$

Magnetizaciono polje je degradient potencijala $\vec{H} = -\text{grad } \varphi_m = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \hat{z}$, tj.

$$\vec{H} = \frac{M}{2} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{a^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z + L/2}{|z + L/2|} - \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2 + (z - L/2)^2}} + \frac{z - L/2}{|z - L/2|} \right] \hat{z}.$$

Vodeći računa da je van štapa magnetizacija jednaka nuli, za magnetno polje u svim tačkama na osi se dobija (lekcije 38 i 53)

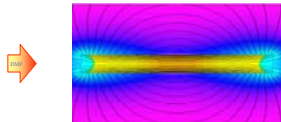
$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad \triangleright \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 M}{2} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{a^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2 + (z - L/2)^2}} \right] \hat{z}.$$



66. Solenoid, stalni magnet i elektromagnet

Magnetno polje u tačkama na osi solenoida, elektromagneta i stalnog magneta se menja po potpuno istom zakonu.

$$f(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{z + L/2}{\sqrt{a^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2 + (z - L/2)^2}} \right]$$



• Magnetno polje solenoida sa vazдушnim jezgrom (lekcija 38). $B_z = \mu_0 H f(z)$.

• Magnetno polje solenoida sa jezgrom od magnetika (lekcija 53). $B_z = \mu H f(z)$.

• Magnetno polje namagnetisanog štapa tj. stalnog magneta (lekcija 65). $B_z = \mu_0 M f(z)$.

• Ako je solenoid namotan oko namagnetisanog štapa (stalni magnet) ukupno polje se dobija kao vektorski zbir pojedinačnih polja.

Očigledno da je solenoid moguće tretirati kao magnet oblika štapa na čijim se krajevima nalaze površinski raspodeljene magnetne pseudomase $\eta_m = \pm NI / L = \pm H$. Ceo proračun je onda potpuno isti kao za homogeno namagnetisani štap (lekcija 65). Ako je debljina solenoida znatno manja od njegove dužine, magnetne mase na polovima se mogu smatrati tačkastim, ceo solenoid kao dipol odgovarajućeg magnetnog momenta (lekcija 38),

$$q_m = \eta_m S = \frac{NIS}{L} = HS = \frac{BS}{\mu_0} = \frac{\Phi}{\mu_0}, \quad \vec{m} = NI \vec{S} = \frac{NIS}{L} \vec{L} = q_m \vec{L}.$$

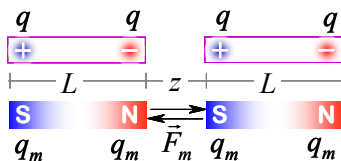
Magnetno polje na kraju solenoida (ili stalnog magneta) se dobija iz opšte formule (lekcija 38), a od odatle može da se dobije i opšti izraz za magnenu pdeudomasu.

$$B_L = \mu_0 \frac{NI}{L} \frac{L}{2\sqrt{a^2 + L^2}}, \quad q_m = \frac{NIS}{L} \triangleright q_m = \frac{2B_L S \sqrt{a^2 + L^2}}{\mu_0}.$$

Ako su poznate nagnetne pseudomase, svi metodi elektrostatičke, uključujući *Coulombov* zakon mogu se primeniti i u magnetostatici.

Sila između dva magneta

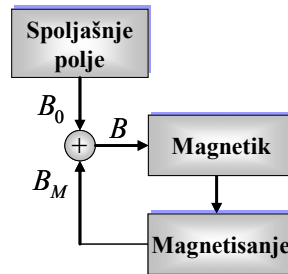
Izraz za silu između dva dipola se dobija pimenom *Coulombovog* zakona. Izraz je izveden na bazi *Gilbertovog* modela (lekcija 04) i nije primenljiv za rastojanja koja teže nuli.



$$F_m = \frac{\mu_0 q_m^2}{4\pi} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+2L)^2} - \frac{2}{(z+L)^2} \right)$$

67. Sfera od linearnog magnetika u homogenom polju

U sferi od linearnog magnetnog materijala homogeno magnetno polje $\vec{B}_0$ (ili $\vec{H}_0$) proizvodi magnetizaciju $\vec{M}_0$. Ova magnetizacija stvara dodatno magnetno polje $\vec{B}_1$, a ono daje novi doprinos magnetizaciji $\vec{M}_1$, koja pak stvara polje $\vec{B}_2$ i tako dalje.



$$\begin{aligned}
 \vec{M}_0 &= \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B}_0 \longrightarrow \vec{B}_1 = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}_0 = \left(\frac{2}{3} \mu_0 \frac{\chi_m}{\mu} \right)^1 \vec{B}_0 \\
 \vec{M}_1 &= \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B}_1 = \frac{2}{3} \mu_0 \left(\frac{\chi_m}{\mu} \right)^2 \vec{B}_0 \longrightarrow \vec{B}_2 = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}_1 = \left(\frac{2}{3} \mu_0 \frac{\chi_m}{\mu} \right)^2 \vec{B}_0 \\
 \vec{M}_2 &= \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B}_2 \longrightarrow \vec{B}_3 = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}_2 = \left(\frac{2}{3} \mu_0 \frac{\chi_m}{\mu} \right)^3 \vec{B}_0 \\
 \dots & \quad \dots \longrightarrow \vec{B}_n = \left(\frac{2}{3} \mu_0 \frac{\chi_m}{\mu} \right)^n \vec{B}_0
 \end{aligned}$$

Ukupno magnetno polje je zbir svih pojedinačnih doprinosa i dobija se kao zbir geometrijske progresije. Metod sukcesivnih aproksimacija nije moguće primeniti za određivanje polja van sfere jer polje u spoljašnjem prostoru nije konstantno.

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \vec{B}_n = \vec{B}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2\mu_0\chi_m}{3\mu} \right)^n \\
 \vec{B} &= \frac{\vec{B}_0}{1 - \frac{2\mu_0\chi_m}{3\mu}} = \frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0} \vec{B}_0
 \end{aligned}$$

Do istog rezultata se dolazi i pomoću izraza za električno polje u sferi od linearnog dielektrika koja se nalazi u homogenom električnom polju, a koji se dobija iz rešenja Laplaceove jednačine za električni skalar potencijal (Sveska I).

Magnetno polje se dobija upotrebom ranije prikazane transkripcije (lekcija 50).

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \vec{E}_0 & \Rightarrow & \vec{H} = \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \vec{H}_0 \\
 \vec{D} &= \frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \vec{D}_0 & \Rightarrow & \vec{B} = \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \vec{B}_0
 \end{aligned}$$

68. Sfera od (fero)magnetika u homogenom polju

Sfera poluprečnika a , načinjena od homogenog i linearnog magnetika permeabilnosti μ , nalazi se u vazduhu u homogenom polju $\vec{H}_0 = H_0 \hat{z}$, $\vec{B}_0 = \mu \vec{H}_0$ (lekcija 67). Ovo je problem graničnih uslova (lekcija 54) koji se rešava integracijom Laplaceove jednačine za magnetni skalar potencijal.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \triangleright \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \triangleright \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad \triangleright \quad \Delta \varphi_m = 0$$

Problem je potpuno analogan problemu sfere od dielektrika (koja se nalazi u homogenom električnom polju (Sveska I). Jasno, potrebno je zameniti sve električne veličine magnetnim transkriptima.

Granični uslovi

$$\begin{array}{l} 1^\circ \quad \varphi_m|_{r=a-} = \varphi_m|_{r=a+} \\ 2^\circ \quad \mu \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} \Big|_{r=a-} = \mu_0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} \Big|_{r=a+} \\ 3^\circ \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_m(r, \theta) = -H_0 z = -H_0 r \cos \theta \end{array}$$

Upotrebom ove transkripcije (lekcija 50) iz rešenja za električni skalar potencijal sledi rešenje za magnetni skalar potencijal,

$$\varphi_m = \begin{cases} -\frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0 r \cos \theta, & r \leq a \\ -H_0 r \cos \theta + \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0 r \cos \theta, & r \geq a \end{cases}.$$

Pošto je $z = r \cos \theta$ dobija se da je polje u sferi homogeno i paralelno spoljašnjem polju (lekcija 67).

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \hat{z} = \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \vec{H}_0, \quad r \leq a,$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \frac{3\mu\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \vec{H}_0 = \frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0} \vec{B}_0, \quad r \leq a.$$

• Prethodni rezultati se mogu iskoristiti za sferu koja je pre unošenja u strano polje prethodno bila homogeno namagnetisana i to paralelno stranom polju. Dakle, opšta struktura polja biće ista kao i u prethodnom slučaju. Vektori $\vec{B}$, $\vec{H}$ i $\vec{M}$ su u prostoru sfere kolinearni, pa se može pretpostaviti da će raspodela magnetnog skalar potencijala biti oblika

$$\varphi_m = \begin{cases} C_1 r \cos \theta, & r \leq a \\ -H_0 r \cos \theta + C_2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 r \cos \theta, & r \geq a \end{cases}.$$

Nepoznate konstante C_1 i C_2 potrebno je odrediti iz graničnih uslova. Uslov 3^o iz postavke problema je automatski zadovoljen pretpostavljenim rešenjem. Na površini sfere tangencijalne komponente vektora magnetizacionog polja su jednake što se svodi na uslov jednakosti potencijala 1^o. Odatle se dobija prva veza između nepoznatih konstanti,

$$C_1 - C_2 = -H_0.$$

Na površini sfere moraju biti jednake i normalne (radijalne) komponente magnetnog polja. Granični uslov 2^o se sada modifikuje jer u unutrašnjosti sfere sada postoji magnetizacija, tj.

$$B_r|_{r=a-} = B_r|_{r=a+} \quad \triangleright \quad \mu_0(H_r + M_r)|_{r=a-} = \mu_0 H_r|_{r=a+}.$$

odnosno,

$$-\mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \varphi_m(r \leq a) + \mu_0 M \cos \theta = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \varphi_m(r \geq a),$$

pa sledi druga veza između nepoznatih konstanti,

$$C_1 + 2C_2 = M - H_0.$$

Nakon određivanja konstanti za magnetni skalar potencijal se dobija

$$\varphi_m = \begin{cases} \left(\frac{1}{3} M - H_0 \right) r \cos \theta, & r \leq a \\ \left(\frac{1}{3} M \left(\frac{a}{r} \right)^3 - H_0 \right) r \cos \theta, & r \geq a \end{cases}.$$

Van sfere potencijal nastaje kao zbir potencijala primarnog homogenog polja i polja koje potiče o namagnetisane sfere. Uticaj namagnetisavanja se može zameniti uticajem magnetnog dipola koji je smešten u centru sfere,

$$\varphi_m = \varphi_o + \frac{1}{3} M \left(\frac{a}{r} \right)^3 r \cos \theta = \varphi_o + \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \vec{r}}{r^3}, \quad r \geq a,$$

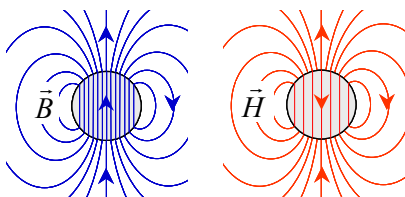
gde je $\vec{m}$ ekvivalentni magnetni dipolni moment,

$$\vec{m} = V \vec{M} = \frac{4}{3} a^3 \pi \vec{M} \quad \triangleright \quad \varphi_m = \varphi_o + \frac{m}{4\pi r^3} \cos \theta$$

Polje u okolini sfere ima i radijalnu i aksijalnu komponentu. U unutrašnjosti sfere, gde su svi vektori kolinearni, polje je homogeno kao što je to i u prethodnom slučaju.

Osnovni par jednačina	$\vec{H} = -\frac{\partial}{\partial z} \varphi_m(r \leq a) \hat{z}$	$\Rightarrow$	$\vec{H} = \vec{H}_0 - \frac{1}{3} \vec{M}, \quad r \leq a,$
	$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$	$\Rightarrow$	$\vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}, \quad r \leq a.$

Slabljenje polja u unutrašnjosti sfere formalno se može povezati sa magnetnim pseudomasama koje se nalaze na površini feromagnetika (lekcija 64) i koje su izvori (ponori) magnetizacionog polja.



• Neka je sfera od diamagnetika ili paramagnetika i neka je nenamagnetisana uneta u strano polje. Tada je namagnetisavanje rezultat delovanja spoljašnjeg polja. Iz osnovnog para jednačina se dobija:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \triangleright \quad \vec{B}_0 + \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} = \mu \left(\vec{H}_0 - \frac{1}{3} \vec{M} \right) \quad \triangleright \quad \vec{M} = \frac{3(\mu - \mu_0)}{\mu + 2\mu_0} \vec{H}_0.$$

Dobijeni izraz za vektor magnetizacije je transkript izraza za vektor polarizacije kod sfere u homogenom električnom polju. Odavde sledi da po prestanku delovanja spoljašnjeg polja magnetizacija iščezava. Međutim, to očigledno nije tako kod stalnih magneta.

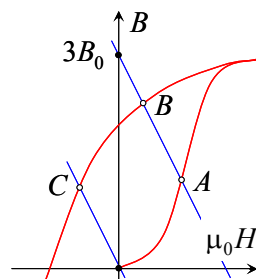
• Neka je sfera od feromagnetika. Iz osnovnog para jednačina je jasno da polje zavisi ne samo od vrednosti spoljašnjeg polja, već i od vrednosti magnetizacije. Kod feromagnetika magnetizacija zavisi od trenutnih vrednosti spoljašnjeg polja ali i od istorije namagnetisavanja. Eliminacijom vektora magnetizacije iz osnovnog para jednačina se dobija jednačina radne prave namagnetisane sfere.

$$B = -2\mu_0 H + 3B_0$$

Vrednosti polja polja (radna tačka) se dobijaju u preseku radne prave i histerezisne petlje.

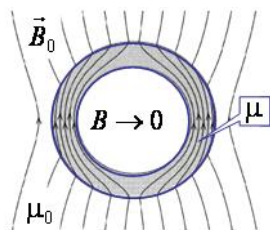
Istorija namagnetisavanja

- Radna tačka A. Pre unošenja u polje sfera nije bila namagnetisana.
- Radna tačka B. Pre unošenja u polje sfera je bila namagnetisana do zasićenja.
- Radna tačka C. Nakon namagnetisavanja do zasićenja spoljašnje polje je isključeno.



69. Pasivna magnetna zaštita

Permeabila sferna ljuska čiji su unutrašnji i spoljašnji poluprečnik a i b respektivno, nalazi se homogenom magnetnom polju $\vec{H}_0 = H_0 \hat{z}$. U spoljašnjem domenu struktura polja mora biti ista kao i slučaju nena-magnetisane sfere. U unutrašnjosti ljuske polje će ostati homogeno i težiće nuli.



$$\varphi_m = \begin{cases} C_1 H_0 r \cos \theta, & 0 \leq r \leq a \\ D_1 r \cos \theta + D_2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 r \cos \theta, & a \leq r \leq b \\ -H_0 r \cos \theta + C_2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 r \cos \theta, & b \leq r < \infty \end{cases}$$

U ovom slučaju postoje tri domena i dve granične površine.

➡ (lekcija 68).

Nepoznate konstante se određuju iz graničnih uslova.

Granični uslovi 1^o i 2^o izražavaju neprekidnost tangencijalnih komponenti H polja, odnosno normalnih komponenti B polja.

$$1^o \text{ za } r = a \quad \triangleright \quad C_1 H_0 + C_2 0 - D_1 - D_2 = 0$$

$$1^o \text{ za } r = b \quad \triangleright \quad C_1 0 + C_2 (a/b)^3 - D_1 - D_2 (a/b)^3 = H_0$$

$$2^o \text{ za } r = a \quad \triangleright \quad C_1 \mu_0 H_0 + C_2 0 - D_1 \mu + D_2 = 0$$

$$2^o \text{ za } r = b \quad \triangleright \quad C_1 0 + C_2 2\mu_0 (a/b)^3 + D_1 \mu - D_2 2\mu (a/b)^3 = -\mu_0 H_0$$

Rešenje dobijenih jednačina daje vrednosti nepoznatih konstanti, a odatle slede izrazi za potencijal i polje. Najznačajnije je odrediti polje u unutrašnjosti ljuske tj. za $r \leq a$.

$$\varphi_m = C_1 H_0 z$$

$$\vec{H} = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \hat{z} = -C_1 H_0 \hat{z}$$

$$C_1 = -\frac{9\mu_r}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2(a/b)^3(\mu_r - 1)^2}$$

Za velike vrednosti relativne magnetne permeabilnosti, $\mu_r \gg 1$, izraz za polje dobija jednostavniji oblik. Za tanke ljuske je $a \approx b$ i $b - a = d$, pa sledi praktična formula iz koje je jasno da je polje u šupljini zanemarljivo.

$$\frac{H}{H_0} \approx \frac{9}{2\mu_r(1 - (a/b)^3)}$$

$$\frac{H}{H_0} \approx \frac{3\mu_0 b}{2\mu d}$$

Mu-metali (na primer, 77% Ni, 16% Fe, 5% Co i 2% Cr ili Mo) imaju veliku permeabilnost (i do sto hiljada) i služe za zaštitu od statičkih ili sporo promenljivih polja.

70. Efikasnost magnetne zaštite

Početak zaštite od elektromagnetnih polja obično se vezuje za *Faradayev* eksperiment sa peharom (Sveska I) iz 1836. godine. Međutim, to je bio samo ponovljeni ogled *Franklina* iz davne 1755. godine. Prvi proračuni pasivne zaštite (oklapanje) od uticaja elektromagnetnih polja potiču sa kraja deventnaestog (1899) i početka dvadesetog veka. Eksperimenti rađeni radi poboljšanja karakteristika feromagnetika doveli su 1914. godine do otkrića legure permalloy (lekcija 61). Zbog poboljšanja mehaničkih osobina ovoj leguri je dodat bakar i tako je 1923. godine nastao mu-metal, prvobitno namenjen proizvodnji kablova. U stvari, radi se o engleskom zapisu grčkog slova μ , pa je ispravnije μ -metal. Danas se znatno više zna o uticaju elektromagnetnih polja na zdravlje, pa postoji izvesna opsednutost gradnjom μ -soba i μ -zgrada - savremenim verzijama *Faradayevog* kaveza.

- Kvantitativna mera efiksanosti zaštite (Eng. *Shielding Effectiveness*) je odnos jačina polja kad je posmatrana tačka nezaštićena (nema oklopa) i kad je zaštićena (oklopljena).

$$SE_H = \left| \frac{H_0}{H} \right|$$

$$SE_H^{dB} = 20 \log SE$$

- Ako se indeks (koji se odnosi na magnetizaciono polje) izostavi, prema usvojenoj definiciji za SE, za sfernu ljusku (lekcija 69) se dobija

$$SE = \frac{H_0}{H} = \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2(a/b)^3(\mu_r - 1)^2}{9\mu_r} = 1 + \frac{2(\mu_r - 1)^2}{9\mu_r} (1 - (a/b)^3)$$

U slučaju tankih ljuski, $a \approx b$ i $b - a = d$, izraz za efikasnost zaštite ima oblik iz koga je jasno da $\mu_r = 1$ znači odsustvo zaštitnog oklopa. Za μ -metal je $\mu_r \gg 1$.

$$SE = 1 + \frac{2(\mu_r - 1)^2}{3\mu_r} \frac{d}{b}$$

$$SE = 1 + \frac{2}{3} \mu_r \frac{d}{b}$$

- Za štice telekomunikacionih kablova, kako je i počela cela istorija elektromagnetne zaštite, poseban značaj ima proučavanje cilindričnih ljuski. Sada, kad je jasno o čemu se radi, bilo bi pravilnije reći oklop. Kad se radi sa linearnim magneticima, raspodela magnetnog skalar potencijala (lekcija 64) je određena rešenjem *Laplaceove* jednačine.

Cilindrični oklop je transverzalno postavljen u magnetno polje koje je pre unošenja cilindra bilo homogeno. Za veoma dug cilindar (efekti krajeva se zanemaruju) raspodela potencijala se ne menja u aksijalnom pravcu, pa je problem dvodimenzionalan.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\varphi_m = T(\theta) R(r)$$

$$R(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-n}$$

$$T(\theta) = B_1 \cos n\theta + B_2 \sin n\theta$$

Kao i kod sfernog oklopa, rešenje za potencijal se traži za tri domena. Iz opšteg rešenja Laplaceove jednačine treba, kao i prethodnim primerima, izdvojiti samo ono za $n=1$. Naime, za bilo koju drugu vrednost zadovoljavanje svih graničnih uslova dovodi do trivijalnih rešenja. Dalje, rešenje je osno simetrično i treba sačuvati parnost funkcije potencijala. U unutrašnjosti cilindra (kao što je to bio slučaj u unutrašnjosti sfere) polje treba da ostane homogeno, a očekuje se da bude znatno manje jačine.

Kad se odbace članovi koji remete konačnost potencijala za $r=0$ i za $r \rightarrow \infty$ ostaje oblik koji sadrži četiri nepoznate konstante, a od najvećeg interesa je C_1 (unutrašnjost oklopa).

$$\varphi_m = \begin{cases} C_1 H_0 r \cos \theta, & 0 \leq r \leq a \\ D_1 r \cos \theta + D_2 \frac{1}{r} \cos \theta, & a \leq r \leq b \\ -H_0 r \cos \theta + C_2 \frac{1}{r} \cos \theta, & b \leq r < \infty \end{cases}$$

Na površinama $r=a$ i $r=b$, koje cilindrični oklop razdvajaju od ostatka prostora, radijalne (normalane) komponente vektora magnetnog polja i ugaone (tangencijalne) komponente vektora magnetizacionog polja su neprekidne.

$$1^\circ \text{ za } r=a \quad \triangleright \quad C_1 H_0 + C_2 0 - D_1 - D_2 (1/a)^2 = 0$$

$$1^\circ \text{ za } r=b \quad \triangleright \quad C_1 0 - C_2 (1/b)^2 + D_1 + D_2 (1/b)^2 = -H_0$$

$$2^\circ \text{ za } r=a \quad \triangleright \quad C_1 \mu_0 H_0 + C_2 0 - D_1 \mu + D_2 \mu (1/a)^2 = 0$$

$$2^\circ \text{ za } r=b \quad \triangleright \quad C_1 0 + C_2 \mu_0 (1/b)^2 + D_1 \mu - D_2 \mu (1/b)^2 = -\mu_0 H_0$$

Nakon što se iz dobijenog sistema linearnih jednačina odrede konstante integracije za magnetni skalar potencijal u šticejnoj oblasti se dobija

$$\varphi_m = C_1 H_0 r \cos \theta = -\frac{4\mu_r}{(\mu_r + 1)^2 - (a/b)^2 (\mu_r - 1)^2} H_0 r \cos \theta, \quad r \leq a.$$

U unutrašnjosti polje je homogeno i usmereno je isto kao i spoljašnje polje. Odatle se dobija i efikasnost zaštite. Dakle, za $r \leq a$

$$\vec{H} = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \hat{z}$$

$$H = -\frac{\partial}{\partial z} (C_1 H_0 r \cos \theta) = -\frac{\partial}{\partial z} (C_1 H_0 z) = -C_1 H_0$$

$$SE = \frac{H_0}{H} = -\frac{1}{C_1},$$

odnosno

$$SE = \frac{(\mu_r + 1)^2 - (a/b)^2 (\mu_r - 1)^2}{4\mu_r} = 1 + \frac{(\mu_r - 1)^2}{4\mu_r} (1 - (a/b)^2)$$

Za tankozidni oklop je $a \approx b$ i $b - a = d$, pa se dobija (kao i za sferni oblik) praktična formula.

$$SE = 1 + \frac{(\mu_r - 1)^2}{2\mu_r} \frac{d}{b}$$

71. Magnetno polje planete Zemlje

Magnetna igla kompasa se na Zemlji uvek orijentiše na isti način. Odavde se zaključuje da naša planeta predstavlja jedan veliki magnet, što je još 1600. godine tvrdio *Gilbert*.

Gilbert je napravio terelu (Lat. *Terrella* - mala Zemlja) tj. magnetni model Zemlje u obliku kugle od oksida gvoždja. Magnetna igla postavljena u bilo koju tačku na kugli okreće se uvek isto, baš kao i igla kompasa na Zemlji. Magnetno polje na Zemlji je zbir sopstvenog polja (95%) i stranog polja (5%) u kom se Zemlja nalazi. Model kugle (lekcija 67) iako nije adekvatan daje iznenađujuće tačne rezultate.

Linije magnetnog polja Zemlje imaju raspored koji bi davao stalni magnet oblika štapa koji je smešten u centru i čija osa sa osom rotacije zaklapa ugao od približno 11° . Južni magnetni pol Zemlje nalazi se na severnoj hemisferi i obrnuto.

Rastojanje između magnetnih polova je oko 2700 km, a rastojanje između geografskih polova je oko 12000 km. Pošto se magnetni polovi Zemlje ne poklapaju sa geografskim polovima to se magnetna igla postavlja samo približno u pravcu sever-jug.

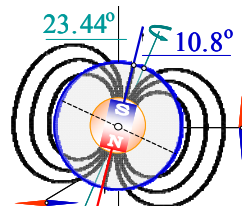
Magnetna igla je zakošena oko obe ose. U odnosu na horizont naginje na dole na severnoj hemisferi, odnosno na gore na južnoj hemisferi. Ugao nagnutosti α_i , je magnetna inklinacija, a ugao nagnutosti kraće ose je magnetna deklinacija α_d . Kosinus ugla inklinacije je odnos horizontalne komponente, B_h , i ukupne jačine polja B .

$$\varphi_m = \frac{m}{4\pi r^2} \cos \theta$$

$$B_r = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} = 2B_0 \cos \theta$$

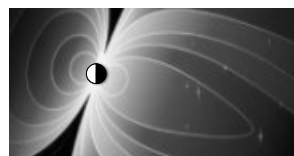
$$B_r = -\mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \theta} = B_0 \sin \theta$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3}$$



S 70°30' severne širine
95°30' zapadne dužine

N 74° južne širine
155° istočne dužine



Srbija
srednje vrednosti

$$B = 46 \mu\text{T}$$

$$B_h = 23 \mu\text{T}$$

$$\alpha_i = 60^\circ$$

$$\alpha_d = 8^\circ$$

Zemljino magnetno polje čini magnetosferu čiji oblik najviše zavisi od naleta solarnog vetra. Magnetosfera se prostire do desetak poluprečnika

Zemlje na svetloj strani, i čak do hiljadu poluprečnika na tamnoj strani. Magnetosfera je zaštitni sloj koji kosmička zračenja skreće na velike visine. Odsustvo magnetnog polja bilo bi pogubno za život na Zemlji.

U blizini magnetnih polova kosmičke čestice ostaju zarobljene stvarajući polarnu svetlost. Postoje saznanja da je *Galileo Galilei* 1629. godine za severnu polarnu svetlost sačinio kovanicu *aurora borealis* kombinujući imena rimske boginje zore (*Aurora*) i grčkog boga severnog vetra (*Boreas*). Iz tog doba za južnu polarnu svetlost potiče naziv *aurora australis*.



www.newstalk.com



Norveški fizičar *Kristian Birkeland* 1913. godine napravio terelu od šuplje mesingane lopte u čijem središtu je bio solenoid. Takva terela u razređenom gasu dovodi do pojave polarne svetlosti baš kao u prirodi.

Promene Zemljinog magnetnog polja prouzrokuju dnevne i godišnje promene provodljivosti jonosfere, ali i pojava pega na Suncu na svakih jedanaest godina. Utvrđeno je da južni magnetni pol rotira oko severnog geografskog pola sa periodom od hiljadu godina. Na osnovu ispitivanja magnetnih svojstava starih stena se zaključuje da su u vrlo dalekoj prošlosti Zemlje magnetni polovi više puta zamenili mesta, i to četiri ili pet puta u poslednjih milion godina. Zemljino magnetno polje konstantno slabi. Od kad postoje stalna merenja, a to znači u poslednjih sto pedeset godina, jačine magnetnog polja je opala za 10%. Proračun unazad pokazuje da magnetno polje gubi polovinu svoje energije na svakih sedam stotina godina. Predviđa se da će za oko dve hiljade godina magnetno polje Zemlje nestati, da bi posle toga počela zamena polova.

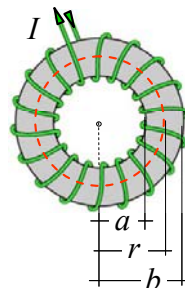
Jezgro Zemlje se najvećim delom sastoji od gvožđa i nikla. Međutim, temperatura jezgra je tako velika da ne može da ima feromagnetne osobine. Najnovije pretpostavke o poreklu magnetnog polja su zasnovane na rotaciji tečnih metala u jezgru zbog čega se formiraju kružni strujni plaštovi i prateće magnetno polje. Zajedničkim radom tima fizičara iz Letonije i Nemačke 2000. godine, tačno četiri veka posle *Gilberta*, u Rigi je napravljena verodostojna terela i tako je dokazana ispravnost modela koji je nazvan tečni dinamo. Na jačinu magnetnog polja najviše utiče provodnost jezgra i brzina rotacije. Time se objašnjava što neke planete sa ohlađenim jezgrom (Mars) ili sporom rotacijom (Venera) nemaju magnetno polje, ili pak imaju polje snažnije nego Zemljino (Jupiter).

72. Magnetna otpornost i Hopkins-Rowlandov zakon

Kad se solenoid povije po zatvorenoj liniji, obično kružnog oblika, dobija se torusni namotaj (Lat. *Torus* - okruglo ispupčenje) ili torus (lekcija 24)

U unutrašnjosti torusa magnetno polje je vrlo približno homogeno. Srednja vrednost jačine magnetnog polje se dobija kad se *Ampèreov* zakon primeni na srednju liniju torusa, tj. na zatvorenu konturu koja prolazi kroz torus i leži u ravni poprečnog preseka.

Iz definicije se dobija izraz za jačinu magnetnog polja, iz koga je jasno da sam oblik namotaja provodnika oko tela torusa nije od uticaja. Ako je dužina srednje linije $l = 2\pi r$ i površina poprečnog preseka S , za magnetni fluks se dobija približna formula, jer se u proračun magnetnog polja uključuje srednja linija torusa.



$$B = \frac{\mu NI}{2\pi r}$$

$$\Phi = BS$$

$$\Phi = \frac{\mu NI}{l} S$$

Najveći deo magnetnog fluks se zatvara kroz unutrašnjost torusa, što je očigledna analogija sa protokom struje u zatvorenom električnom kolu. Zato, treba primetiti da je izraz za fluks moguće mapisati u formi koja je analogna izrazu za *Ohmov* zakon (Sveska II) u linearnom električnom kolu. Ova formulacija je poznata kao *Hopkinsonov* zakon, mada je istorijski gledano to ipak *Rowlandova* analogija. Na ovaj način se dolazi do pojma magnetne otpornosti R_m koja je nazvana reluktanca (Lat: *rēluctor* - opirati se), a recipročna vrednost magnetne otpornosti je Λ , permeanca (Lat: *perměo* - probiti kroz nešto). Veličina $F_m = NI$ naziva se magnetno pobudna sila, po analogiji sa elektromotornom silom i jedinica je *amper-navojak*, mada je dimenziono to samo amper, kao što je za elektromotornu silu jedinica volt.

Magnetni fluks	Jednosmerna struja
$\Phi = \frac{NI}{\frac{1}{\mu} \frac{l}{S}} = \frac{NI}{R_m} = \frac{F_m}{R_m}$	$I = \frac{U}{\frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}} = \frac{U}{R}$
$\Phi = \Lambda F_m$	$I = GU$
<i>Hopkinsonov zakon</i>	<i>Ohmov zakon</i>

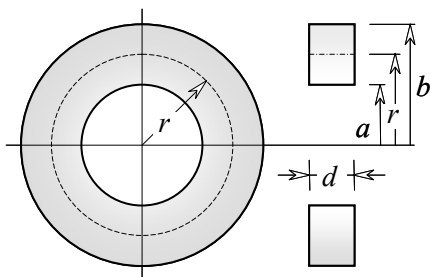
$$R_m = \frac{F_m}{\Phi}$$

$$[R_m] = \frac{\text{A}}{\text{Wb}}$$

$$[\Lambda] = \frac{\text{Wb}}{\text{A}}$$

73. Torusni namotaj pravougaonog poprečnog preseka

Kod električnih kola dužine provodnika i otpornika su uvek znatno veće od poprečnih dimenzija, što nije slučaj u magnetizmu. Zato je primena prikazane analogije veoma ograničena. Ipak, u velikom broju slučajeva dobijaju se dovoljno tačni rezultati. Tako na primer, kad su namotaji torusa pravougaoni, fluks je moguće izračunati tačno.



$$B = \frac{\mu NI}{2\pi r} \quad \triangleright \quad \Phi_t = \int_a^b B dS = \frac{\mu_0 NI d}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu NI d}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \Phi_0 \ln \frac{b}{a}$$

Međutim, magnetni fluks može da se izračuna i približno,

$$\Phi = \frac{F_m}{R_m} = \frac{NI}{R_m}, \quad R_m = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S},$$

i to tako što se magnetna otpornost izračuna za srednju liniju torusa čija je dužina $l = 2\pi(a+b)/2$, a površina poprečnog preseka odredi tačno, $S = d(b-a)$. Tako se dobija da je približna vrednost fluksa,

$$\Phi_p = \frac{\mu NI}{l} S = \frac{\mu NI d}{2\pi} \frac{2(b-a)}{b+a} = \Phi_0 \frac{2(b-a)}{b+a} = 2\Phi_0 \frac{b/a - 1}{b/a + 1}.$$

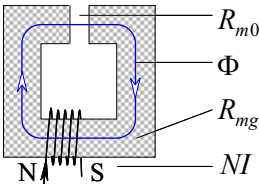
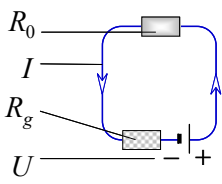
Ako se uporede tačno i približno izračunate vrednosti i odredi relativna greška, vidi se da je približnu formulu za izračunavanje fluksa moguće sa zadovoljavajućom tačnošću upotrebiti i kod srazmerno debelih torusa.

b/a	1.01	1.50	2.00	2.50	3.00	$\rightarrow \infty$
Φ_t / Φ_p	1.00	1.01	1.03	1.06	1.09	2.00
$\delta[\%]$	0.07	1.35	3.82	6.45	8.98	100.00

Čini se da izračunavanje fluksa samo po sebi nije od posebnog značaja. Međutim, kao što će biti pokazano, na promeni fluksa bazira čitava teorija elektromagnetne indukcije.

74. Linearna magnetna kola i linearna električna kola

Linearni magnetni materijali i vazduh imaju približno istu magnetnu permeabilnost. Pomoću ovih materijala nije moguće kanalisati magnetni fluks i realizovati magnetna kola. Međutim, analogija koja postoji između linearnih magnetnih i električnih kola ima primenu u rešavanju problema nelinearnih magnetnih kola. Analogija je samo matematička i zasnovana je na sličnosti formalnih zapisa nekih veličina i zakona. Ove dve teorije su u fizičkom smislu sasvim različite. Najveća razlika je činjenica da električna struja predstavlja tok nosilaca naelektrisanja što znači i prenos mase, dok magnetni fluks ne predstavlja nikakav tok bilo koje čestice što znači da nema prenosa mase.

Linearna magnetna kola		Linearna električna kola	
Veličina ili zakon	Jedinica	Veličina ili zakon	
$\vec{B} = \mu \vec{H}$	T	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	
B	T = Wb/m ²	J	
H	A/m	E	
μ	H/m	σ	
$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{S}$	Wb	$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS}$	
Zakon konzervacije magnetnog fluksa		Prvi Kirchhoffov zakon	
$\text{div } \vec{B} = 0,$		$\text{div } \vec{J} = 0,$	
$\sum \Phi = 0$		$\sum I = 0$	
Ampèreov zakon		Potencijal i napon	
Magnetopobudna sila		Elektromotorna sila	
$F_m = \int \vec{H} \cdot d\vec{l}$	A	$\varepsilon = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$	
$R_m = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S}$	1/H	$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}$	
$\Lambda = 1/R_m$	H	$G = 1/R$	
Hopkinsonov zakon		Ohmov zakon	
$F_m = \Phi R_m$		$U = I R$	
			

75. Nelinearna magnetna kola

• Određivanje magnetopobudne sile kad je poznat fluks.

Neka su zbog jednostavnosti svi feromagnetni delovi magnetnog kola istog preseka S_1 , te se mogu prikazati ukupnom dužinom l_1 , a radni deo kola je vazdušni procep poprečnog preseka S_0 i dužine l_0 . Za magnetno kolo se zadaje fluks ili jačina polja u procepu. Magneto-pobudna sila se izračunava u četiri koraka, tako da se jačina magnetizacionog polja u feromagnetiku (3) očitava sa odgovarajućeg (BH) dijagrama.

	$\Phi = B_1 S_1 = B_0 S_0$
1	$B_1 = B_0 \frac{S_0}{S_1}$
2	$H_0 = \frac{1}{\mu_0} B_0$
3	$H_1 = f(B_1)$
4	$NI = H_0 l_0 + H_1 l_1$

• Određivanje fluksa kad je poznata magnetopobudna sila.

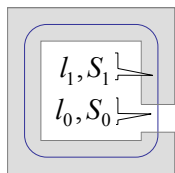
Iz poznatog broja amper-navojaka (lekcija 72), fluks nije moguće odrediti direktno. Iz (BH) dijagrama potrebno je konstruisati (ΦF) dijagram što se postiže množenjem para vrednosti za B i H poprečnim presecima i dužinama za svaki deo kola. U ovom primeru su samo dve tačke, ali se za vazdušni procep (BH) dijagram ne koristi. S druge strane, iz *Ampèreovog* zakona (4) se dobija jednačina radne prave. Radna tačka magnetnog kola, kojom je određen i fluks, se nalazi u preseku radne prave i (ΦF) dijagrama.

1	$\Phi_0 = N_0 I_0 / R_{m0}$
2	$A(\Phi_0, N_0 I_0)$
3	$B(BS_1, Hl_1)$
	$NI = H_0 l_0 + Hl$
4	$Hl = NI - \Phi R_0$

5

• Radna tačka magneta

U magnetnom kolu bez vazdušnog procepa, jačina polja je jednaka rezidualnoj magnetizaciji (lekcija 60).



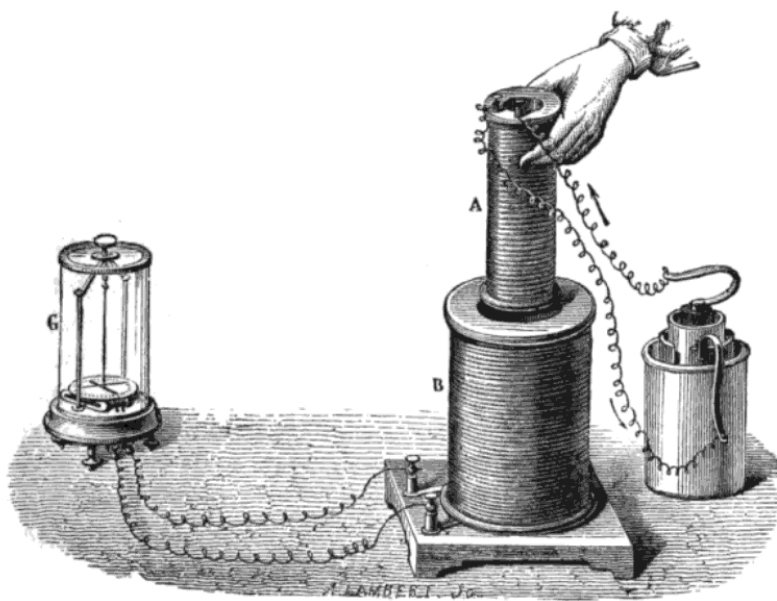
Zbog postojanja procepa jačina polja je određena radnom tačkom, koja se nalazi u preseku krive demagnećenja i radne prave.

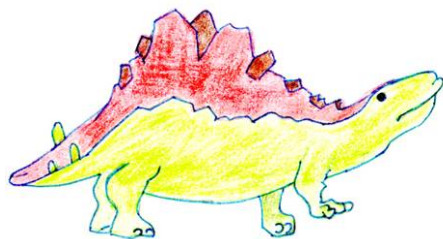
Jednačina radne prave se dobija, kao i ranije, iz zakona o konzervaciji magnetnog fluksa i *Ampèreovog* zakona.

1	$\Phi = B_1 S_1 = B_0 S_0$
2	$H_1 l_1 + H_0 l_0 = 0$
3	$B_1 = -\mu_0 \frac{S_0}{S_1} \frac{l_1}{l_0} H_1$
4	$B_1 = \tan \alpha H_1$

5

PROMENLJIVA POLJA



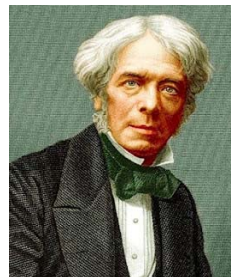


Mirjana Rađić, 2016

Michael Faraday

 Dosta im je učenja. Sve su škole jednake.
Deca znaju da čitaju i pišu - šta im još treba?

Nakon tih reči svog oca četrnaestogodišnji *Michael* je počeo da zarađuje svoj hleb radeći kao raznosac novina u jednoj knjižari i izgledalo je da je njegova budućnost rešena. Nešto kasnije *Michael* je počeo i da uči knjigovezački zanat.



Uveče, kad su knjigovesci završavali svoj posao, *Michael* je ostajao sam u radionici i pri ostatku lojalne sveće žedno čitao knjige. Najviše su ga privlačile naučne knjige svojim naslovima i slikama, ali ubrzo ih je ostavljao sa uzdahom - skoro ništa nije mogao u njima da razume. Ali jednog dana *Michaelu* je u ruke dospela knjiga 'Razgovori iz hemije', a koju će on tokom celog života smatrati svojom prvom učiteljicom i najboljim drugom. U knjizi su bili opisani eksperimenti koje je svako mogao sam da izvede i *Michael* ih je odmah izvodio.

Pošto je savladao štivo 'Razgovori iz hemije', *Michael* je odabrao članak o elektricitetu i odmah izveo eksperimente sa komadićem voska protrljanim tkaninom i sa oduševljenjem posmatrao parčiće hartije koji poskakuju i lepe se za vosak. Nekoliko večeri kasnije izradio je i električnu mašinu sa čijim se crtežima upoznao iz enciklopedije. Prvi eksperimenti oduševili su *Michaela* pa je napravio i drugu električnu mašinu pomoću koje je izvodio najjednostavnije električne eksperimente. Od tada *Michael* vodi svoj 'Filosofski zbornik' u koji je zapisivao beleške, rasprave i slučajeve koji se odnose na umetnost, ali prevashodno na nauku.

Jedne večeri *Michael* je ugledao privatni oglas koji je obaveštavao da će biti održan niz predavanja iz prirodnih nauka. Kad je predavanje otpočelo o *Newtonovoj* gravitaciji i magnetizmu, *Michael* je otvorio svoju svesku i počeo tako marljivo da beleži da više nikoga nije primećivao. Jedna činjenica ga je rastužila - nije mogao da pravilno prenese crteže sa table. *Michael* nije umeo da crta i od tog dana je kod suseda počeo da uči slikanje.

Na predavanjima o elektricitetu slušao je o *Franklinu* koji je za vreme oluje puštao zmaja od hartije u oblake, a primetio je da se svi predmeti od čelika u kući u koju udari grom namagnetišu, ali veza između elektriciteta i magnetizma još uvek nije bila otkrivena.

Do tada *Michael* je samo slušao o *Davyju* koji je, nesumljivo u to vreme, bio najbolji engleski hemičar i poznat u celom svetu. Na njegovim predavanjima bili su sasvim drugi slušaoci. Govorilo se o hloru, a kad su počeli eksperimenti, *Michael* je sasvim bio osvojen. Od tada je imao samo jednu misao - doći do mogućnosti da se bavi naukom. I mislio je u sebi: ljudi koji se bave naukom nisu kao trgovci ili fabrikanti, to su ljudi osobite plemenitosti, dobrote, finih i uzvišenih osećanja. Ako ma ko od njih sazna o mojoj žarkoj želji da služim nauci, pružiće mi, naravno, ruku pomoći. Potrebno je da se samo nekom obratim. Posle toga *Michael* je rešio da napiše pismo predsedniku Kraljevskog londonskog instituta, koga je smatrao glavom učenog sveta. Pismom mu je objasnio svoj položaj, interesovanja, i molio ga da dobije ma kakvo, pa i najbeznačajnije mesto u ma kojoj naučnoj ustanovi. Odgovor nikad nije stigao. *Michael* se obratio *Davyju*. Napisao je pismo i poslao ga zajedno sa sveskom koja je sadržala sva njegova predavanja i crteže eksperimenata. Odgovor je stigao. Nešto kasnije, *Michael* je dobio mesto u laboratoriji Kraljevskog instituta - postao je asistent. Posle šest meseci *Davy* mu je ponudio da sa njim i njegovom suprugom krene na putovanje po Francuskoj, Italiji i Švajcarskoj. Tako se susreo sa *Ampèream* i prisustvovao *Gay-Lussacovom* predavanju. Tokom putovanja *Michael* je asistirao u mnogim *Davyevim* eksperimentima, uključujući otkriće joda i eksperimente sa dijamantom kojima je potvrđena *Newtonova* pretpostavka da je dijamant kao čist ugljenik zapaljivo telo. *Michael* je vršio i samostalne eksperimente sa svicima želeći da utvrdi otkud potiče svetlost.

Po povratku u Englesku, na inicijativu svojih prijatelja, *Michael* počinje da drži prva predavanja u Filozofskom društvu. Nešto kasnije njegov rad o analizi krečnjaka štampan je u jednom naučnom časopisu. Ovim se *Michael* postepeno osamostaljuje. Sledeći samostalni rad je bio ogled prevođenja hlora u tečno stanje, što je bio veliki udarac za *Davyjevu* sujetu jer je njegov učenik to uspeo pre njega. Posle ovih naučnih doprinosa predloženo je da *Michael Faraday* bude primljen u Londonsko kraljevsko društvo. *Davy* je osporavao njegov prijem u ovo društvo. Proteklih 12 godina on je posmatrao *Michaela* sa visine i sa zavišću. Još jedan incident je pogoršao postojeću situaciju. *Michael* je stao u odbranu naučne istine i u odbranu života mnogih rudara govoreći o mogućnosti eksplozije i pored primene *Davyjevih* "bezopasnih" rudarskih lampi. *Michael Faraday* je ipak primljen u Londonsko kraljevsko društvo. Postao je i počasni doktor na Oksfordu i mnogim akademijama.

Davy je kasnije stalno, kao u šali, govorio: Ja sam učinio nekoliko otkrića koja nisu bez značaja za nauku, ali među njima najveće je što sam otkrio *Faradaya*.

Faradayeva formulacija elektromagnetne indukcije

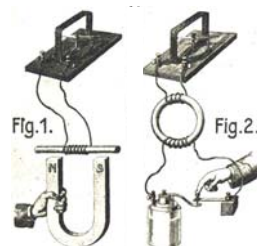
Kao samostalni naučnik *Faraday* je, kao i većina naučnika tog vremena, bio zainteresovan za Aragoov eksperiment iz 1824. godine u kome bakarni rotirajući disk prouzrokuje okretanje igle kompasa. *Faraday* je pretpostavio, a to je i zapisao, da je uzrok te pojave elektricitet. I mada je ponovio Aragoov eksperiment, nekoliko godina nije uspeo da dokaže svoju pretpostavku. Onda je 1831. godine započeo seriju eksperimenata.

U svom prvom eksperimentu *Faraday* je obmotao dva navoja na torusno jezgro. Očekivao je da kad struja protiče kroz jedan od navoja dobije struju u drugom navoju.



Raniji eksperimenti su pokazivali da električna struja stvara magnetno polje, pa je *Faraday* pokušao da dokaže pogrešnu naučnu hipotezu tj. da pomoću stalnog magnetnog polja izazove električnu struju. Međutim, dobio je samo kratkotrajne impulse, koje je nazvao talas elektriciteta, dok je uključivo ili isključivao struju u prvom navoju.

U sledećih nekoliko meseci *Faraday* je izvršio više eksperimenata ali svi se mogu svesti na dva tipična slučaja. U prvom slučaju pomerio je žičanu konturu ili izvor polja, dok su u drugom slučaju kontura i izvor polja nepokretni ali se menjala jačina polja. U svim eksperimentima je dobijao samo talase elektriciteta..



Objašnjavajući Aragoovu rotaciju konstruisao je generator jednosmerne struje koji je postao poznat kao *Faradayev disk* (lekcija 77). Tako je otkrio i formulisao zakon elektromagnetne indukcije koji predstavlja jedan od najvažnijih zakona elektrodinamike i elektrotehnike.

Mada je bio genijalan eksperimentator, *Faraday* nije vladao jezikom matematike, bar ne u tolikoj meri, da svoja otkrića tako i zapiše. *Faraday* je doneo sintetički zaključak: Intenzitet indukovane struje je srazmeran brzini promene fluksa.



Ako horizontalna žica ...
seče magnetne krive ...
tada se dobija struja u žici.

U fusnoti je objasnio da su magnetne krive linije magnetne sile. On ih je snagom svoje naučne uobrazilje tako predstavljao kao da ih je i video.



Faraday je svojim duhovnim okom video kako linije sile prelaze ceo prostor, dok su matematičari videli privlačne centre sila delovanja na daljinu.

Maxwell

Faraday - Letz - Neumannov zakon

Sasvim nezavisno od *Faradaya*, 1832. godine *Henry* je otkrio elektromagnetnu indukciju. U Americi se još nije znalo da je *Faraday* već saopštio svoje rezultate. Mnogo godina kasnije priznanje mu je odatu u vidu naziva jedinice za induktivnost (lekcija 88).

Smer indukovane struje je odredio. *Heinrich Lenz* 1834. godine.



Ako indukovana struja teče, njen smer je takav da se protivi promeni koja je stvara.

Zakon je tako uskladio sa zakonom o očuvanju energije. Priznanje mu je odatu u vidu oznake za induktivnost (lekcija 88).

Matematički zapis zakona indukcije je dao *Neumann* tek 1845. godine.

$$\text{Lentz} \quad \varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \begin{matrix} \text{Faraday} \\ \text{Neumann} \end{matrix}$$



Indukovana elektromotorna sila u zatvorenoj konturi je jednaka negativnoj brzini promene magnetnog fluksa obuhvaćenog tom konturom.

Neumann je zapravo predložio dva zakona elektromagnetne indukcije. Prvi je bio za elektromotornu silu generisanu usled kretanja konture u odnosu na polje (zakon generatora), a drugi za elektromotornu silu usled promene samog polja (zakon transformatora). I bio je u pravu. Potpuna dva različita fenomena opisana su istom formulom. U prvom slučaju na naelektrisanja koja se kreću zajedno sa provodnikom deluje *Lorentzova* sila (lekcija 11), pa je pitanje da li se pojava struje u konturi može nazvati indukcijom. U drugom slučaju neelektrisanja u konturi su nepokretna i samo neko električno polje može da ih pokrene. Međutim, električnog polja nema, osim ako ne nastaje usled promena magnetnog polja. To je jeste elektromagnetna indukcija.

Dakle, potpuno je začuđujuće što dve fizički različite pojave dovode do iste (*Faraday* je to eksperimentalno dokazao), veoma jednostavne i savršeno tačne formule. U ovom slučaju fizičari su saglasni da je u pitanju čudna podudarnost sa značajnim posledicama. Upravo ova podudarnost je i dovela *Einsteina* do specijalne teorije relativnosti.

76. Zakon elektromagnetne indukcije

Kad god se iz bilo kog razloga magnetni fluks kroz zarvorenu konturu promeni, u konturi se pojavljuje elektromotorna sila.

Elektromotorna sila (napon) nastaje kao posledica indukovano električnog polja E_i .

Promene magnetnog polja dovode do promene fluksa. Međutim, do promene fluksa dolazi i ako se menja površina obuhvaćena konturom i ova pojava se objašnjava Lorentzovom silom.

Izvod fluksa po vremenu dimenziono je potencijal.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E}_i d\vec{l}$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

$$\oint_C \vec{E}_i d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

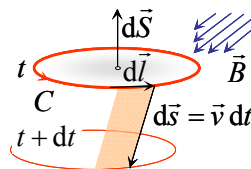
$$[d\Phi]/[dt] = V$$

Faradayeva otkrića pokazuju da postoje dva različita električna polja. Prvo koje potiče od naelektrisanja i drugo koje je rezultat promene magnetnog fluksa. Međutim, električno polje stacionarnog toka naelektrisanja je konzervativno i cirkulacija tog polja je jednaka nuli (Sveska II).

Stoga se umesto indukovano električnog polja u izrazima može uzimati ukupno polje, pa se dobija konačani oblik *Faradayevog* zakona.

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

U opštem slučaju izvod fluksa po vremenu (izvod proizvoda) dovodi do zbira elektromotornih sila koje nastaju bilo zbog promene površine (kretanje ili deformacija konture), bilo zbog promene polja (po pravcu ili jačini).



Dakle, tačno onako kako je predložio *Neuamann*.

Dinamička i statička indukcija

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

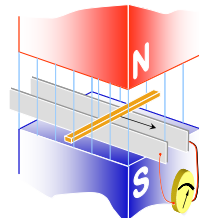
$$-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} = -\oint_C \vec{B} (\vec{v} \times d\vec{l}) = -\oint_C \vec{B} \left(\frac{d\vec{S}}{dt} \times d\vec{l} \right) = -\oint_C \vec{B} \frac{d\vec{S}}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

77. Dinamička indukcija nije indukcija?

Dinamička indukcija nije ništa drugo do puko razdvajanje i grupisanje naelektrisanja koje nastaje kao posledica delovanja magnetne sile na naelektrisanja koja se zajedno sa provodnikom kreću kroz magnetno polje.

- Neka se pravolinijski provodnik kreće kroz homogeno magnetno polje indukcije B , brzinom $v = ds/dt$. Osa provodnika, pravac brzine i pravac magnetnog polja su međusobno normalni. Na elektrone deluje elektromagnetna sila (lekcija 12).



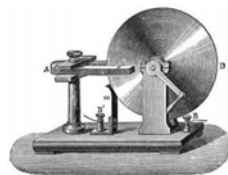
$$F = F_e + F_m = qE + qvB = q(E + vB).$$

Na početku kretanja nema električnog polja. Tokom kretanja na krajevima provodnika se pojavljuju viškovi raznoimenih naelektrisanja, usled čega nastaje - indukuje se - električno polje. To električno polje sprečava dalje kretanje elektrona. U ravnotežnom stanju elektromagnetna sila je jednaka nuli (električna sila je jednaka magnetnoj) odakle je $E_i = -vB$. Elektromotorna sila (ustvari, napon između krajeva provodnika, lekcija 76) je

$$\varepsilon = E_i dl = -vB dl = -\frac{ds}{dt} B dl = -B \frac{dS}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Zahvaljujući poslednjem delu zapisa celu pojavu nazivamo indukcijom.

- Četvrti deo *Faradayovog* saopštenja iz 1831. godine je interpretacija *Aragoovog* eksperimenta. Između polova stalnog magneta postavljena je rotirajući bakarni disk. Na osu diska i na njegov obod montirana su dva klizajuća kontakta koji sa galvanometrom čine zatvoreno strujno kolo.



Neka je a poluprečnik diska i ω ugaona brzina. Zbog dinamičke indukcije u svakoj tački diska se indukuje radijalno električno polje čija jačina se određuje iz magnetne sile i čiji smer je od centra ka periferiji diska. Elektromotorna sila, koja se može meriti voltmetrom, je jednaka linijskom integralu električnog polja duž radijusa.

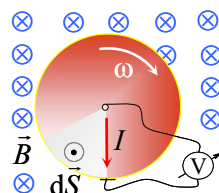
$$E_i = vB = \omega r B$$

$$\varepsilon = \int_0^a \vec{E}_i d\vec{r}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} a^2 \omega B$$

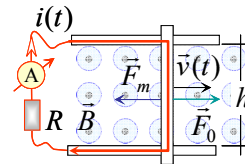
Do istog rezultata se dolazi i pomoću priraštaja fluksa, koji je u ovom slučaju negativan, pa sledi:

$$dS = d\theta \int_0^a r dr = \frac{1}{2} a^2 \omega dt \quad \left| \quad \varepsilon = -\frac{d}{dt} (\vec{B} d\vec{S}) = \frac{1}{2} a^2 \omega B \right.$$



78. Model generatora jednosmernog napona - 1

Šine na rastojanju h kratko spaja kilzni provodnik. Sistem se nalazi u homogenom magnetnom polju B (lekcija 76). Na jednom kraju šine su vezane na otpornik R . Silom F_0 klizač je pokrenut brzinom v_0 .



U klizaču se indukuje elektromotorna sila ε . $\Rightarrow \varepsilon = hBv_0$

Kroz električno kolo protiče struja i . $\Rightarrow i = \varepsilon / R = hBv_0 / R$

Kretanju se suprotstavlja magnetna sila F_m . $\Rightarrow F_m = IhB = (hB)^2 v_0 / R$

- Ako je $F_0 > F_m$ klizač će se kretati ubrzano, povećavajuću brzinu i struju u kolu koja je stalnog smera (Eng. DC - direct current)
- Ako je ostvaren uslov $F_0 = F_m$ sistem je stanju dinamičke ravnoteže, sve veličine su stacionarne, a sistem radi kao generator jednosmernog napona.

Klizač se kreće konstantnom brzinom $v = v_0$. $\Rightarrow v_0 = F_0 R / (hB)^2$

Mehanička snaga sistema je $P_M = Fv$. $\Rightarrow P_M = F_0^2 R / (hB)^2$

Generiše se stalna elektromotorna sila $\varepsilon = E_0$. $\Rightarrow E_0 = F_0 R / (hB)$

Kroz kolo protiče stalna struja $i = I_0$. $\Rightarrow I_0 = F_0 / (hB)$

Električna snaga generatora je $P_G = i\varepsilon$. $\Rightarrow P_G = F_0^2 R / (hB)^2$

Mehanička snaga se se u celosti pretvara u električnu snagu (svi gubici zanemareni) i u celosti troši na otporniku, jer je $P_M = P_G = P_J = i^2 R$.

- Ako nakon pokretanja sila F_0 prestane da deluje klizač će se kretati po inerciji ali usporeno sve dok ga magnetna sila ne zaustavi.

Neka je masa klizača m . U nekom trenutku t ravnoteža sila je $F_m + ma = 0$, odakle sledi $\Rightarrow \frac{(hB)^2}{R} v + m \frac{dv}{dt} = 0$ diferencijalna jednačina za brzinu.

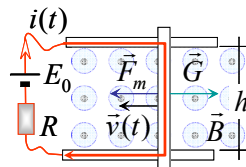
U rešenju diferencijalne jednačine konstanta integracije se određuje iz početnog uslova da $\Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{(hB)^2}{mR} t}$ je $v = v_0$ za $t = 0$.

Elektromotorna sila i struja su direktno srazmerene brzini što znači da u vremenu opadaju po istom eksponencijalnom zakonu. Kao i u prethodnom slučaju ukupna mehanička energija se pretvara u električnu.

$$P_J = R \int_0^\infty i^2 dt = \frac{(hB)^2}{R} v_0^2 \int_0^\infty e^{-2\frac{(hB)^2}{mR} t} dt = \frac{1}{2} m v_0^2 = E_k.$$

79. Model motora jednosmerne struje

Princip rada motora jednosmerne struje može da se objasni pomoću elektrodinamičkog sistema iz prethodnog primera. Šine su priključe izvor jednosmernog napona E_0 , a klizač savladava silu G .



Po uključenju napona protiče struja $i = I_0$. $\Rightarrow I_0 = E_0 / R$

Klizač se pokreće zbog magnetne sile F_m . $\Rightarrow F_{m0} = I_0 h B = E_0 h B / R$

U klizaču se indukuje elektromotorna sila ε . $\Rightarrow \varepsilon = h B v_0$

Nova jačina struje je sada $i = (E_0 - \varepsilon) / R$. $\Rightarrow i = (E_0 - h B v_0) / R$

Magnetna sila se smanjuje na $F_m = i h B$. $\Rightarrow F_m = (E_0 - h B v_0) h B / R$

Sa povećanjem brzine smanjuje se magnetna sila i u jednom trenutku postaje jednaka sili opterećenja. Od tog trenutka klizač će se kretati konstantnom brzinom v . Ako je sila opterećenja (na primer sila težine) onda će elektromotor dizati teret stalnom brzinom.

Dinamička ravnoteža nastupa za $F_m = G$. $\Rightarrow G = (E_0 - h B v) h B / R$

Odavde se izračunava brzina klizača v . $\Rightarrow v = \frac{E_0}{h B} - \frac{G R}{(h B)^2}$

Struja u ravnotežnom stanju je $G = F_m = i h B$. $\Rightarrow i = G / (h B)$

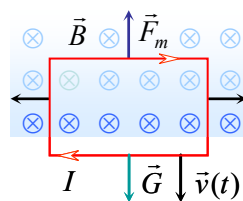
Električna snaga izvora napajanja je $P_G = i \varepsilon$. $\Rightarrow P_G = E_0 G / (h B)$

Mehanička snaga motora je $P_M = F v$. $\Rightarrow P_M = \frac{E_0 G}{h B} - \frac{G^2 R}{(h B)^2}$

80. Slobodan pad konture u magnetnom polju

Pravougaona kontura se samo svojim gornjim delom nalazi u homogenom magnetnom polju (lekcija 2). U trenutku $t = 0$ kontura se pusti da pada. Pojavom brzine u konturi se javlja struja koja će imati takav smer da magnetna sila konturu podiže. Slobodan pad je usporen. Jednačina kretanja (lekcija 78) daje rešenje za brzinu, $F_m + m a = G$

$$v = \frac{G R}{(h B)^2} \left(1 - e^{-\frac{(h B)^2}{m R} t} \right).$$



$$\varepsilon = h B v$$

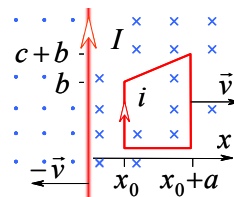
$$i = \varepsilon / R = h B v / R$$

$$F_m = I h B = (h B)^2 v / R$$

$$v_\infty = G R / (h B)^2$$

81. Relativno kretanje konture i magnetnog polja

Kad se kontura kreće u magnetnom polju pojava elektromotorne sile se objašnjava *Loretzovom* silom. Međutim, promena fluksa je ista i ako kontura miruje, a izvor magnetnog polja se kreće. Na primer, potpuno je sve jedno da li se kontura udaljava od provodnika brzinom $\vec{v}$ ili se provodnik udaljava od konture brzinom $-\vec{v}$.



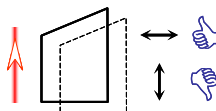
Neka se kontura oblika romba nalazi u magnetnom polju neograničene strujne niti. Jačina polja zavisi od rastojanja (lekcija 21) ali i visina romba zavisi od rastojanja, pa je fluks kroz površinu ograničenu konturom romba,

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$h(x) = b + \frac{c}{a}(x - x_0)$$

$$\Phi = \int_{x_0}^{x_0+a} B(x) dS(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+a} \frac{h(x) dx}{x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(c + \left(b - \frac{c}{a} x_0 \right) \ln \frac{x_0 + a}{x_0} \right).$$

Ukupni fluks zavisi samo od rastojanja konture od provodnika (x_0) i samo promena tog rastojanja može dovesti do promene fluksa.



Pomeranje konture u pravcu provodnika ili pomeranje samog provodnika po pravcu sopstvene ose ne dovodi do promene fluksa i indukcije. Pošto je provodnik neograničeno dug, ovaj drugi slučaj je sasvim očigledan.

Indukovana elektromotorna sila će proizvesti struju koja stvara novo magnetno polje koje se protivi promeni. Pošto se sa udaljavanjem fluks obuhvaćen konturom smanjuje, indukovana struja će fluks povećavati i u stranici bližoj provodniku imaće smer kao i primarna struja.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx_0} \frac{dx_0}{dt}$$

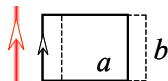
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dx_0} v$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{ab}{x_0(x_0 + a)} - \frac{c}{x_0 + a} + \frac{c}{a} \ln \frac{x_0 + a}{x_0} \right) v$$

Iz izvedenog izraza direktno slede dva specijalna slučaja.

Za $c = 0$

pravougaonik.



$$\varepsilon_p = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{abv}{x_0(x_0 + a)}$$

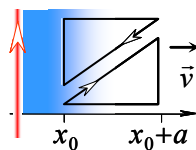
Za $b = 0$

trougao.



$$\varepsilon_{td} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{c}{a} \ln \frac{x_0 + a}{x_0} - \frac{c}{x_0 + a} \right) v$$

Neka je trougaona kontura iz prethodnog slučaja postavljena tako da joj se sada kateta nalazi na rastojanju x_0 od provodnika. Brzopletu se može zaključiti da su fluksevi u oba slučaja jednaki.



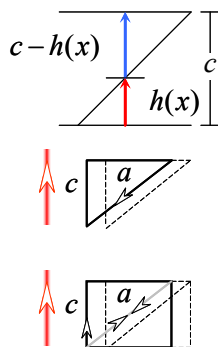
Konture, nazovimo ih 'trougao donji' i 'trougao gornji', imaju iste površine, ista je jednačina prave na kojoj im leže hipotenuze, na istom su početnom rastojanju od provodnika i nalaze se u istom magnetnom polju. Međutim, fluksevi obuhvaćeni ovim konturama nisu isti. Magnetno polje opada sa rastojanjem i najjače je u neposrednoj blizini provodnika. U oblasti jačeg polja 'trougao donji' manjom površinom zadire u polje i ona se povećava u pravcu u kome polje opada. Suprotno, 'trougao gornji' ima veću površinu u oblasti jačeg polja.

Kad se vodi računa da se visina konture 'trougao gornji' sa rastojanjem od provodnika smanjuje, za indukovanu elektromotornu silu se dobija

$$\varepsilon_{tg} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{c}{a} \ln \frac{x_0 + a}{x_0} + \frac{c}{x_0 + a} + \frac{ac}{x_0(x_0 + a)} \right) v.$$

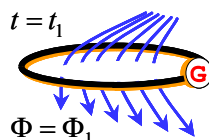
Ako se dve trougaone konture sastave tako da formiraju pravougaonik, elektromotorna sila biće zbir pojediničnih, što daje već poznati rezultat,

$$\varepsilon_{td} + \varepsilon_{tg} = \varepsilon_p.$$



82. Fluksmetar

Određivanje jačine magnetnog polja pomoću fluksmetra (lekcija 16) zasnovano je na merenju indukovane količine naelektrisanja koja protekne kroz balansni galvanometar.



Navojak fluksmetra ukupne otpornosti R se unese u magnetno polje. Kroz površinu S postoji magnetni fluks Φ . Zatim se magnetno polje isključi ili se navojak bilo kojom brzinom i po bilo kojoj putanji iznese iz magnetnog polja, tako da je na kraju fluks jednak nuli. Zbog promene magnetnog fuksa kroz navojak protekne količina naelektrisanja koja je izmerena.

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \triangleright \quad i\Delta t = -\frac{1}{R} \Delta\Phi \quad \triangleright \quad i(t_2 - t_1) = -\frac{1}{R} (\Phi_2 - \Phi_1)$$

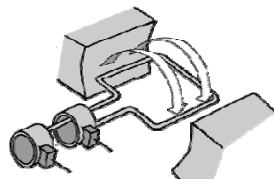
$$\begin{array}{ccccccc} \begin{array}{c} t_1 = 0 \\ \Phi_1 = \Phi \end{array} & \begin{array}{c} t_2 = t \\ \Phi_2 = 0 \end{array} & \triangleright & it = \frac{\Phi}{R} & \triangleright & Q = \frac{BS}{R} & \triangleright & B = \frac{QR}{S} \end{array}$$

83. Model generatora naizmeničnog napona

Klizanje provodnika po šinama ne obezbeđuje kontinualnu proizvodnju napona jer šine imaju ograničenu dužinu. Pravougaona kontura površine S rotira ugaonom brzinom ω oko osovine koja je normalna na pravac homogenog magnetnog polja B . Krajevi konture su vezani na prstenove koji rotiraju zajedno sa navojkom. Sa prstenova se pomoću kliznih kontakta (četkice) odvodi indukovana struja.

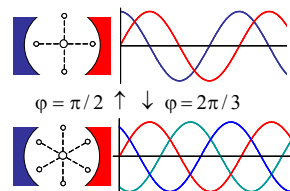
U trenutku t normala površine konture i vektor magnetne indukcije zaklapaju ugao $\alpha = \omega t$. Indukovana elektromotorna sila je

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}(BS \cos \omega t) = \omega BS \sin \omega t = E_m \sin \omega t.$$



Ovaj generator daje prostoperiodični napon. Struja kroz potošač naizmenično menja smer nakon svakog poluperioda. Otuda potiču nazivi naizmenična struja (Eng. AC - *alternating current*) i alternator.

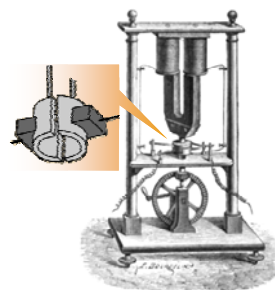
Ako se po nekim uglom φ na postojeću konturu doda još jedna ili više njih, istovremeno se dobija više fazno pomerenih napona. Polifazni sistemi su postali značajni tek nakon radova Nikole Tesle (obrtno polje).



84. Model generatora jednosmernog napona - 2

Od *Faradayevih* otkrića do prve praktične upotreba naizmenične struje prošlo je četvrt veka. U vreme prvih eksperimenata nije bilo ni pomisli da bi naizmenična struja mogla da se koristi. Zato je bilo važno proizvesti jednosmerni napon. Generator jednosmernog napona nazvan je dinamo.

Pionir u oblasti proizvodnje naizmenične struje *Pixii* je pronašao mehaničko rešenje tj. komutator napona. Prsten za skidanje napona sa rotora je podelio na polovine. Svaki put kad dođe do promene polariteta, polovine zamene mesta i struja uvek teče u istom smeru. Struja je bila jednosmerna ali je menjala amplitudu. Napon na četkicama je bio pulsirajući. Bolji rezultati su dobijeni sa većim brojem segmenata na komutatoru i većim brojem kontura.



Danas se naizmenični napon ispravlja pomoću poluprovodničkih dioda.

85. Druga Maxwelllova jednačina

Faradayeva otkrića pokazuju da stvarno postoje dva električna polja. Prvo čiji su uzrok naelektrisanja i drugo koje je prati svako promenljivo magnetno polje. Razrađujući ovu ideju, *Maxwell* je bitno uopštio zakon elektromagnetne indukcije pretpostavivši da postojanje provodne konture uopšte nije bitno za važenje zakona. Dakle, kontura može da bude od bilo kog materijala ili može da bude samo zamišljena, a indukovano električno polje postoji kako u materijalnim sredinama tako i u vakuumu. U to doba direktna eksperimentalna provera ove pretpostavke nije bila moguća bez provodne konture.



$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Otkriće elektromagnetnih talasa bila je prva indirektna eksperimentalna potvrda *Maxwellove* pretpostavke i cele teorije elektomagnetnih polja.

Za razliku od elektrostatičkog i stacionarnog električnog polja, promenljivo električno polje pored izvorne komponente ima i vrtložnu komponentu. Dakle, pored linija električnog polja koje imaju izvore i ponore u naelektrisanjima, postoje linije električnog polja koje se zatvaraju same u sebe. U opštem slučaju (lekcija 39) je

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} \quad \triangleright \quad \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Ukupno električno polje je bezvrtložno i može da se izrazi pomoću gradijenta neke skalarne funkcije (Sveska I), jer je rotor gradijenta uvek jednak nuli. U slučaju stacionarnih stanja izvod po vremenu je jednak nuli i električno polje postaje elektrostatičko.

Znači da je i za promenljiva polja tražena skalarna funkcija zapravo električni skalar potencijal.

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{R} dV$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho}{R} dV$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Međutim, izrazi po kojima se određuju potencijali izvedeni su za stalne struje i nepokretna naelektrisanja i zato mogu da se primene samo u slučaju sporo promenljivih tj. kvazistatičkih polja gde se efekat konačne brzine elektromagnetne promene ne primećuje (lekcija 108).

86. Indukovano električno polje - beskonačan solenoid

Analogija koja postoji između zapisa *Ampèreovog* i *Faradayevog* zakona može da se iskoristiti za određivanje indukovano električnog polja. Jasno, poznavanje samo rotora funkcije nije dovoljno. Ako se posmatra ono električno polje koje je generisano indukcijom (nema slobodnih naelektrisanja) tada su divergencije i električnog i magnetnog polja jednake nuli, pa analogija postaje potpuna. Indukovano električno polje je određeno izvodom magnetnog polja na potpuno isti način kao što je magnetno polje određeno gustinom struje. Kod problema sa visokim stepenom simetrije (lekcija 21) analogija se može koristiti i u integralnom obliku.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$$

Međutim, postoji važna razlika između ova dva zakona. *Ampèreov* zakon podrazumeva struje nepromenljive u vremenu, dok *Faradayev* zakon podrazumeva samo vremenske promene. U diferencijalnim oblicima ova dva zakona razlika se ne primećuje, jer se izrazi svode na jednu tačku. U integralnom obliku zakona indukcije to znači da sve tačke koje pripadaju oblasti integracije treba posmatrati u istom trenutku. Elektromagnetne promene se ne prenose trenutno već brzinom svetlosti. Potrebno je konačno vreme da se promene sa jednog kraja domena osete na drugom kraju. Za mala rastojanja uzima se da je vreme prenošenja promene jednako nuli, što je poznato kao kvazistatička aproksimacija (lekcija 108).

Tipičan primer je beskonačan (veoma dug) solenoid sa promeljivom strujom. Smatra se da u jednom trenutku, struja, magnetno i indukovano električno polje svuda imaju istu vrednost.

$$B = \begin{cases} \mu_0 \frac{NI}{L}, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Određivanje indukovano električnog polja

pomoću magnetnog vektor potencijala

$$\Phi = \oint_C \vec{A} d\vec{l} = BS$$

$$A2r\pi = \begin{cases} r^2\pi B, & r \leq a \\ a^2\pi B, & r \geq a \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} = -\hat{\theta} \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N}{L} \frac{dI}{dt} \begin{cases} r, & r \leq a \\ \frac{a^2}{r}, & r \geq a \end{cases}$$

pomoću *Faradayevog* zakona

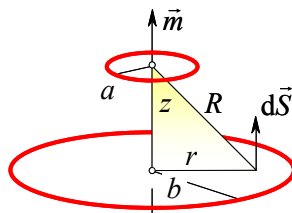
$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial B}{\partial t} S$$

$$E2r\pi = -\frac{dB}{dt} \begin{cases} r^2\pi, & r \leq a \\ a^2\pi, & r \geq a \end{cases}$$

Linije električnog polja su koncentrične kružnice čiji smer je određen *Lenzovim* pravilom i pravilom desne zavojnice.

87. Fluksevi dve koaksijalne kružne konture

Date su dve koaksijalne kružne konture poluprečnika b i $a \ll b$ koje pripadaju međusobno paralelnim ravnima na rastojanju z . Struja koja protiče kroz veću konturu stvara magnetno polje (lekcija 33) za koje može da se smatra da je u oblasti površine manje konture konstantno.



Tako se dobija da magnetni fluks kroz manju konturu, osim od jačine struje kroz veću konturu (i magnetne permeabilnosti), zavisi samo od geometrijskih odnosa.

$$R = (r^2 + z^2)^{1/2}$$

$$B_b = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$d\vec{S} = 2\pi r dr \hat{z} \quad \triangleright \quad d\Phi_{ab} = \vec{B}_1 d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} dS$$

$$\Phi_{ab} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{b^2 2\pi}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^a r dr \quad \triangleright \quad \Phi_{ab} = \frac{\mu_0 \pi I}{2} \frac{a^2 b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}}$$

Neka sada ista jačina struje protiče kroz manju konturu. Magnetno polje u oblasti površine veće konture nije konstantno. Kako je manja kontura stvarno mala, može da se aproksimira magnetnim dipolom (lekcija 22).

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m}\hat{R})\hat{R} - \vec{m}}{R^3}, \quad \text{gde je} \quad \vec{m} = m \hat{z} = a^2 \pi I \hat{z}, \quad (\hat{z}\hat{R})\hat{R} = \frac{z}{R} \hat{R}.$$

Polje koje potiče od elementarnog dipola (lekcija 44) ima komponente u radijalnom i aksijalnom pravcu.

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{R^3} \left(3 \frac{z}{R} \hat{R} - \hat{z} \right)$$

U fluksu koji manja kontura stvara kroz veću učestvuju samo komponente u aksijalnom pravcu jer se radijalne komponente zbog simetrije anuliraju. Dakle, dobija se još jedan faktor $\hat{z}\hat{R}$,

$$d\vec{S} = 2\pi r dr \hat{z} \quad \triangleright \quad d\Phi_{ba} = \vec{B}_2 d\vec{S} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{R^3} \left(3 \frac{z}{R} \hat{R}\hat{z} - \hat{z}\hat{z} \right) dS.$$

Nakon integracije po površini veće konture dobija se ukupni fluks. Dva dobijena rezultata su identična, $\Phi_{ab} = \Phi_{ba}$,

$$\Phi_{ba} = \frac{\mu_0 a^2 I}{2} \int_0^b \left(\frac{3z^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right) dr = \frac{\mu_0 \pi I}{2} \frac{a^2 b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Dobijena formula uključuje dva linijska integrala, po jedan za obilazak po svakoj od kontura. Već u najjednostavnijim slučajevima (lekcija 89) formula dovodi do velikih matematičkih teškoća i nema stvarnu upotrebnu vrednost u praktičnim proračunima. Međutim, oдавde se otkriva najvažnija činjenica u vezi međusobne induktivnosti.

Prvo, vrednost integrala se ne menja ako se zameni redosled integracije. Drugo, fizički to znači da konture mogu međusobno da zamene uloge.

$$M = L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R}$$

Tako se dobija konačan izraz poznat kao *Neumannova* formula. Pošto su međusobne induktivnosti iste, indeksi u oznakama postaju suvišni. Usvojeno je da se međusobna induktivnost obeležava sa M .

Za bilo koji oblik i međusobni položaj kontura 1 i 2 važi: Fluks kroz konturu 2 prouzrokovan tokom struje kroz konturu 1 je jednak fluksu kroz konturu 1 kad ista struja teče kroz konturu 2.

Promena struje u nekoj konturi ne samo da indukuje elektromotornu silu u obližnjim konturama, već indukuje elektromotornu silu ε_s i u sopstvenoj konturi i to je pojava samoindukcije.

Magnetno polje i fluks su proporcionalani jačini struje, a konstanta proporcionalnosti L je koeficijent samoindukcije ili induktivnost.

$$\Phi = LI$$

Induktivnost (kao i kapacitivnost) je pozitivna veličina, pa negativan znak u zakonu indukcije diktira da će elektromotorna sila samoindukcije biti takvog smera da se protivi bilo kakvoj promeni struje.

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$$

Da bi se uspostavila struja u konturi, izvor napona prvo mora da savlada elektromotornu silu samoindukcije (lekcija 90). Induktivnost u električnim kolima ima sličnu ulogu kao masa u mehaničkim sistemima. Što je veća induktivnost teže je promeniti struju - što je veća masa teže je promeniti brzinu.

$$U + \varepsilon_s = 0$$

$$U = L \frac{dI}{dt}$$



$$F = m \frac{dv}{dt}$$

Određivanje koeficijenta samoindukcije (i međusobne indukcije) u opštem slučaju je veoma složen zadatak. Samo kod sistema sa velikim stepenom simetrije i pri kvazistatičkoj aproksimaciji mogu se dobiti približne i praktično upotrebne formule.

Solenoid (lekcija 24)

$$L = \mu_0 \frac{S N^2}{l}$$

Torus (lekcija 24)

$$L = \mu_0 \frac{S N^2}{l}$$

Torus (lekcija 73)

$$L = \frac{\mu_0 N^2 d}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

89. Međusobna induktivnost dve kružne konture

Određivanje međusobne induktivnosti dve koaksijalne kružne konture (lekcije 37 i 88) je jedan od osnovnih problema. *Neumannova* formula, koja inače nema baš upotrebu vrednost, već u ovom primeru dovodi do priličnih matematičkih teškoća. U polarno-ciindričnom koordinatnom sistemu se dobija redom:

$$dl_a = a d\theta_a, \quad dl_b = b d\theta_b \quad \triangleright \quad d\vec{l}_b d\vec{l}_b = ab \cos(\theta_a - \theta_b) d\theta_a d\theta_b$$

$$R = \sqrt{r_a^2 + r_b^2 - 2\vec{r}_a \vec{r}_b} \quad \triangleright \quad R = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta_a - \theta_b) + z^2}$$

$$x = \frac{ab}{a^2 + b^2 + z^2} \quad \triangleright \quad \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{x}{ab}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2x \cos(\theta_a - \theta_b)}}$$

Kad se svi izrazi zamene u *Numannovu* formulu dobija se dvostruki integral koji nije moguće rešiti u zatvorenom obliku.

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_a d\vec{l}_b}{R} \quad \triangleright \quad M = \frac{\mu_0}{4\pi} \sqrt{abx} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta_a - \theta_b) d\theta_a d\theta_b}{\sqrt{1 - 2x \cos(\theta_a - \theta_b)}}$$

Ako se imenilac podintegralne funkcije razvije u *Taylorov* red

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x \cos(\theta_a - \theta_b)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n \cos^n(\theta_a - \theta_b),$$

i nakon što sumiranje i integracija zamene redosled, sledi

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \sqrt{abx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{n+1}(\theta_a - \theta_b) d\theta_a d\theta_b.$$

Određeni integral po jednoj od promenljivih daje konstantu, pa je rešenje integrala po preostaloj promenljivoj jednak gornjoj granici. Tako se dobija

$$M = \frac{\mu_0 \pi}{2} x \sqrt{abx} \left(1 + \frac{15}{8} x^2 + \frac{315}{64} x^4 \dots \right)$$

$$M \approx \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2 + z^2)^{3/2}}$$

- Kako je x mala veličina tada u proračun može da se uključi samo prvi član reda.
- Konačno, ako je $b \gg a$ dobija se prethodno izveden rezultat (lekcija 87).

$$\int \sin^n t dt = -\frac{1}{n} \cos t \sin^{n-1} t + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} t dt$$

$$\int \cos^n t dt = \frac{1}{n} \sin t \cos^{n-1} t + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} t dt$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta_a - \theta_b) d\theta_a = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n-1}(\theta_a - \theta_b) d\theta_a = 0$$

• *Neumannova* formula za međusobnu induktivnost dve kružne konture može da se napiše i u obliku u kome je razlika uglova zamenjena jednim uglom koji se, jasno, nalazi u istim granicama kao i razlika uglova, a koje opisuju pun krug.

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} ab \int_0^{2\pi} d\theta_b \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta + z^2}}$$

Prvi integral ima vrednost 2π , a integral koji ostaje je potpuno istog oblika kao integral koji se pojavljuje u izrazu za magnetni vektor potencijal usamljene kružne konture (lekcija 44). Kao što je to već ranije urađeno, smenana $\theta = \pi - 2\alpha$, $d\theta = -2d\alpha$ i $\cos \theta = 2\sin^2 \alpha - 1$, integral se dovodi na oblik

$$M = \mu_0 \sqrt{ab} k \int_0^{\pi/2} \frac{(2\sin^2 \alpha - 1) d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}, \quad k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + z^2},$$

koji omogućava da se međusobna induktivnost izrazi preko potpunih eliptičkih integrala prve i druge vrste,

$$M = \mu_0 \sqrt{ab} f(k), \quad f(k) = \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k).$$

Potpuna sličnost izraza za magnetni vektor potencijal kružne konture i međusobnu induktivnost dve kružne konture je posledica primene *Neumannove* formule, Naime, magnetni vektor potencijal kružne konture (lekcija 44) u bilo kojoj tački prostora je

$$A_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} f(k).$$

Prema *Neumannovoj* formuli (lekcija 88) je

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I} = \frac{1}{I} \int_{s_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2 = \frac{1}{I} \oint_{C_2} \vec{A}_1 d\vec{l}_2,$$

što dovodi do istog rezultata.

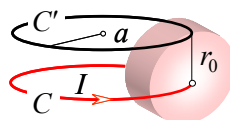
$$M = \frac{1}{I} \oint_{C_2} \vec{A}_1 \Big|_{r=b} d\vec{l}_2 = \vec{A}_1 \Big|_{r=b} \oint_{C_2} d\vec{l}_2 = 2\pi b \frac{\mu I}{2\pi I} \sqrt{\frac{a}{b}} f(k) = \mu_0 \sqrt{ab} f(k).$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{\pi} K(k) &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}\right)^2 k^4 + \left(\frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2}\right)^2 k^6 + \dots, & k < 1 \\ \frac{2}{\pi} E(k) &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} + \left(\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2}\right)^2 \frac{k^6}{5} + \dots, & k < 1 \end{aligned} \right\} \text{(Prilog D)}$$

90. Samoinduktivnost i kružna kontura

Samoinduktivnost neke konture dobija se iz direktno iz *Neumannove* formule ako se pretpostavi da se dve identične konture poklapaju. Međutim, tada konture ne mogu da budu beskonačno tanke. Ova nerealna pretpostavka daje $R=0$ kad se na putu integracije elementi $d\vec{l}_1$ i $d\vec{l}_2$ podudaraju, što dovodi do beskonačne vrednosti integrala.

Za konturu koja ima konačnu debljinu može da se smatra da struja teče po osi provodnika što čini jednu konturu za integraciju. Druga kontura može da leži bilo gde na površini provodnika.



Ovakvim postupkom se ne razmatra polje u unutrašnjosti provodnika i zbog toga se dobija samo spoljašnja (eksterna) induktivnost.

$$L_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{d\vec{l} d\vec{l}'}{R}$$

Ukupnu induktivnost čini zbir spoljašnje i unutrašnje induktivnosti. Problem unutrašnje induktivnosti ne postoji kod beskonačno tankih kontura i kod proračuna međusobne induktivnosti. Međutim, kod proračuna samoinduktivnosti debljina provodnika mora da se uzme u obzir, a tu nastaje problem definicije fluksa. Naime, u provodniku konačne debljine može da se obrazuje beskonačno mnogo zatvorenih kontura, a kroz svaku od njih postoji različiti fluks. Da bi se izbegle ove teškoće, samoindukcija se najčešće određuje pomoću energije magnetnog polja (lekcija 95).

• Induktivnost usamljene kružne konture može da se odredi iz formule za međusobnu induktivnost dve konture (lekcija 89) kao specijalan slučaj u kome je $z=0$ i $a=b$, odakle sledi da je $k=1$. Za ovu vrednost argumenta eliptički integral druge vrste E ima vrednost jedan, ali eliptički integral prve vrste K za $\alpha = \pi/2$ postaje beskonačan.

Očigledno debljina provodnika mora da se uzme u obzir i treba odabrati $a=b$ i $z=r_0$. Međutim, i dalje ostaje proračun integrala za $k \approx 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow 1} E(k) = 1 \\ \lim_{k \rightarrow 1} K(k) \rightarrow \infty \end{array} \right\}$$

Pomenuti singularitet koji se pojavljuje u tački $\alpha = \pi/2$ može da se premesti u tačku nula tako što se uvede smena $\alpha = \pi/2 - \beta$. Zatim oblast integracije treba podeliti uglom $\delta \rightarrow 0$ na manji deo koji sadži singularitet i veći ostatak za koji se može uzeti $k=1$.

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \beta}} = \int_0^\delta + \int_\delta^{\pi/2} = K_1 + K_2$$

Prvi sabirak i dalje sadrži singularitet, ali je ugao po kome se integrirali uvek mala veličina, $0 \leq \beta \leq \delta \rightarrow 0$, pa može da se napiše da je

$$\sqrt{1-k^2 \cos^2 \beta} = \sqrt{1-k^2(1-\sin^2 \beta)} = \sqrt{1-k^2(1-\beta^2)} \approx \sqrt{1-k^2+\beta^2},$$

odakle se dobija tablični integral,

$$K_1 = \int_0^\delta \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2+\beta^2}} = -\ln \left(\frac{\delta + \sqrt{1-k^2+\delta^2}}{\sqrt{1-k^2}} \right). \quad \triangleright \quad K_1 \approx \ln \frac{2\delta}{\sqrt{1-k^2}}$$

U drugom sabirku uvek je $\beta > 0$, tako da može da se zameni $k=1$. Za vrednost integrala se onda dobija

$$K_2 = \int_\delta^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \beta}} = \int_\delta^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sin \beta} = -\ln \left(\tan \frac{\delta}{2} \right). \quad \triangleright \quad K_2 \approx -\ln \frac{\delta}{2}$$

Kad se dobijeni rezultati saberu proizvoljni ugao δ kojim je podeljena oblast integracije se eliminiše iz rezultata.

$$\Rightarrow K(k) \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}}$$

Dobijena aproksimativna formula za potpuni eliptički integral prve vrste važi za $k \approx 1$ ali i dalje nije moguće koristiti granični slučaj $k=1$. Međutim, kad se zamene vrednosti za koje se dobija usamljena kružna kontura, $a=b$ i $z=r_0$, $r_0 \ll a$, sledi

$$\frac{4}{\sqrt{1-k^2}} = 4 \sqrt{\frac{(a+b)^2 + z^2}{(a-b)^2 + z^2}} \quad \triangleright \quad \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} = 4 \sqrt{\frac{4a^2 + r_0^2}{r_0^2}} \approx \frac{8a}{r_0}$$

Konačno, iz formule za međusobnu induktivnost dve kružne konture dobija se formula za približno izračunavanje spoljašnje induktivnosti usamljene kružne konture.

$$M = \mu_0 \sqrt{ab} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right] \quad \triangleright \quad L_e \approx \mu_0 a \left(\ln \frac{8a}{r_0} - 2 \right)$$

Ovde treba napomenuti da se formula za induktivnost kružne konture skoro redovno izvodi tako što se smatra da je međusobno rastojanje dve konture jednako nuli $d=0$, a da su poluprečnici kontura a i $b=a+r_0$, pri čemu je $r_0 \ll a$. To dovodi do istog rezultata, samo što, mora se priznati, izgleda manje logično.

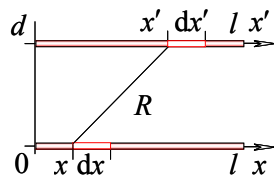
91. Induktivnost pravih paralelenih odsečaka

U prethodnim razmatranjima prećutno je pretpostavljeno da su smerovi obilaska po konturama, tj. smerovi struja isti. Međutim, veličina i znak koeficijenta međusobne indukcije zavise od skalarnog proizvoda elemenata kontura. To se najlakše uočava kod pravih provodnika.

Međusobna induktivnost međusobno upravni provodnika je nula.

Kod paralelnih provodnika struje mogu biti paralelne ili antiparalelne (lekcija 30), pa je

$$M = \pm \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{dx dx'}{\sqrt{(x' - x)^2 + d^2}}.$$



Unutrašnji integral je tablični. Rešenje ima dva oblika.

Videti fusnotu.

$$\int_0^l \frac{dx'}{\sqrt{(x' - x)^2 + d^2}} = \operatorname{arcsinh} \frac{l - x}{d} + \operatorname{arcsinh} \frac{x}{d}$$

$$\int_0^l \operatorname{arcsinh} \frac{l - x}{d} dx + \int_0^l \operatorname{arcsinh} \frac{x}{d} dx = 2 \int_0^l \operatorname{arcsinh} \frac{x}{d} dx$$

Kad se (kao podrazumevan) dvoznak izostavi, konačno se dobija da je

$$M = \frac{\mu_0 d}{2\pi} \left[\frac{l}{d} \operatorname{arcsinh} \frac{l}{d} - \sqrt{1 + \left(\frac{l}{d}\right)^2} + 1 \right] = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\operatorname{arcsinh} \frac{l}{d} - \sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2} + \frac{d}{l} \right]$$

ili kad se upotrebi logaritamska funkcija (videti fusnotu)

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{l}{d} + \sqrt{1 + \left(\frac{l}{d}\right)^2} \right) - \sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2} + \frac{d}{l} \right].$$

• Spoljašnja samoinduktivnost se dobija kad se provodnici preklape, tj. kad je $d = r_0$. Imajući u vidu da je $l/r_0 \gg 1$, a $r_0/l \ll 1$ sledi konačna približna formula.

Za $l \gg r_0$

$$L_e \approx \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \frac{2l}{r_0} - 1 \right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + d^2} \right) + C = \operatorname{arcsinh} \frac{x}{d} + C$$

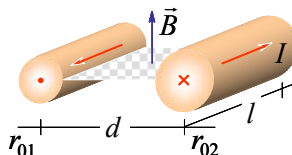
$$\int_0^l \operatorname{arcsinh} \frac{l - x}{d} dx = - \int_0^l \operatorname{arcsinh} \frac{l - x}{d} d(l - x) = \int_0^l \operatorname{arcsinh} \frac{x}{d} dx$$

$$\int \operatorname{arcsinh} x dx = x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{x^2 - 1} + C$$

92. Dvožični vod i dva dvožična voda

• Dva veoma duga paralelna provodnika, kružnih poprečnih preseka, kroz koje teku struje iste jačine i suprotnih smerova čine dvožični vod. Spoljašnju induktivnost dvožičnog voda najlakše je odrediti pomoću spoljašnjeg fluksa i definicije inudktivnosti (lekcija 89)

U tačkama površine između najbližih izvodnica cilindričnih omotača provodnika, vektori magnetnog polja koje stvaraju struje koje teku po osama provodnika su istog pravca i smera (lekcija 30), pa je



$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad \left| \quad \text{Fluks vektora magnetnog polja treba izračunati kroz površinu konačnih dimenzija, na primer kroz odsečak dužine } l,$$

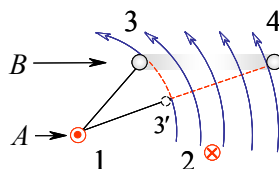
$$\Phi_e = l \int_{r_{01}}^{d-r_{02}} B_1 dr_1 + l \int_{r_{02}}^{d-r_{01}} B_2 dr_2 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{(d-r_{01})(d-r_{02})}{r_{01}r_{02}}.$$

Kad je $r_{01} = r_{02} = r_0 \ll d$ sledi približna formula za spoljašnju induktivnost dvožičnog voda koja se uobičajeno računa po jedinici dužine provodnika i naziva se podužna induktivnost, $L' = L/l$.

$$L_e = \frac{\Phi_e}{I} \approx \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}$$

$$L'_e \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}$$

• Dvožični vod A čine provodnici 1-2, a drugi dvožični vod B čine provodnici 3-4. U provodnicima svakog od vodova, struje su istih intenziteta i suprotnih smerova. Neka je aktivan vod A .



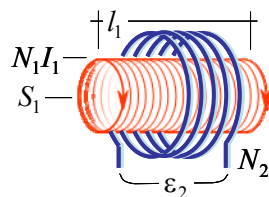
Linije polja provodnika 1 su koncentrični krugovi sa centrima na osi provodnika, tako da je fluks vektora polja kroz odsečak površine 3-4 voda B isti kao kroz odsečak površine 3'-4. Kod izračunavanja međusobne podužne induktivnosti debljina provodnika ne mora da se uzme u obzir pa su granice integracije određene položajima osa provodnika. Na isti način se određuje fluks koji stvara provodnik 2. Konačno je

$$\Phi_{B1} = l \int_{d_{13}}^{d_{14}} B_1 dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{d_{13}}^{d_{14}} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d_{14}}{d_{13}}, \quad \Phi_{B2} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d_{23}}{d_{24}},$$

$$M' = \frac{M}{l} = \frac{\Phi_{B1} + \Phi_{B2}}{I l} \quad \triangleright \quad M' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{d_{14} d_{23}}{d_{13} d_{24}}$$

93. Koaksijalni solenoidi

Kroz solenoid dužine l_1 , kružnog poprečnog preseka poluprečnika a , tj. površine S_1 sa N_1 namotaja protiče promenljiva struja I_1 . Jačina indukovano električnog polja (lekcija 86) srazmerna je brzini promene struje i zavisi od rastojanja od ose solenoida.



U konturi poluprečnika r indukuje se elektromotorna sila ε_2 .

$$\varepsilon_2 = \oint_C \vec{E} d\vec{l} = 2\pi r E$$

$$E = -\frac{1}{2} \frac{\mu_0 N_1}{l_1} \frac{dI_1}{dt} \begin{cases} r, & r \leq a \\ \frac{a^2}{r}, & r \geq a \end{cases} \triangleright \varepsilon_2 = -\frac{\mu_0 N_1}{l_1} \frac{dI_1}{dt} \begin{cases} r^2 \pi, & r \leq a \\ a^2 \pi, & r \geq a \end{cases}$$

Rezultat očigledno zavisi od veličine obuhvaćenog fluksa. Kad kružna kontura obuhvata solenoid, ceo fluks se zatvara samo kroz poprečni presek solenoida (van solenoida polje je jednako nuli), pa poluprečnik konture, a i njen oblik više nisu od značaja.

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1} \triangleright \Phi = B_1 S_1 \triangleright \varepsilon_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 N_1}{l_1} \frac{dI_1}{dt} a^2 \pi$$

• Neka je umesto kružne konture oko solenoida namotan drugi kraći solenoid sa N_2 namotaja. U prethodnom razmatranju se ništa ne menja, osim što su fluks i indukovana elektromotorna sila N_2 puta veći.

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1}{l_1} \frac{dI_1}{dt} \triangleright M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1}{l_1} \triangleright \varepsilon_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

• Zbog pojave samoindukcije u solenoidu se istovremeno indukuje povratna elektromotorna sila koja je srazmerna broju namotaja N_1 .

$$\varepsilon_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 N_1 N_1 S_1}{l_1} \frac{dI_1}{dt} \triangleright L_1 = \frac{\mu_0 N_1 N_1 S_1}{l_1} \triangleright \varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$$

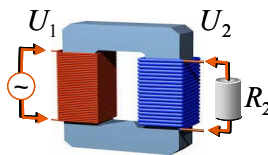
• Ako promenljiva struja teče kroz spoljašnji solenoid praktično je nemoguće odrediti fluks kroz svaki od namotaja dužeg solenoida jer je polje kraćeg solenoida veoma složeno i svi ti fluksevi su različiti. Međutim, međusobne induktivnosti su iste i problem je rešen.

• Ako su solenoidi istih dužina onda se koeficijenti sopstvenih induktivnosti razlikuju samo po broju namotaja, pa se dobija veza između tih koeficijenata.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -M \frac{dI_2}{dt} \\ \varepsilon_2 &= -L_2 \frac{dI_2}{dt} \\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} &= \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} \end{aligned}$$

94. Model transformatora

Kad su dva solenoida namotana oko istog jezgra, tada sigurno obuhvataju isti fluks. Jezgro je koncentrador fluksa. To je primitivan transformator - uređaj za povećavanje ili smanjivanje napona izvora promenljive struje.



Princip rada transformatora otkrio je *Faraday* svojim eksperimentom iz 1831. godine. Međutim, za otkriće transformatora vezuju se imena onih koji su svoja znanja uspjeli da komercijalizuju (dodatak B). Pošto svaki namotaj oba solenoida prožima isti fluks Φ tada je

$$\varepsilon_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{i} \quad \varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad \triangleright \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{N_2}{N_1},$$

gde su ε_1 i ε_2 povratna elektromotorna sila samoindukcije (u primaru), odnosno indukcije (u sekundaru). Realniji primer nije bitno različit.

Na primar je doveden prostoperiodičan napon.

$$\Rightarrow U_1 = U_0 \cos \omega t$$

Indukovana povratna elektromotorna sila u celosti se suprostavlja dovedenom naponu.

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = -U_1$$

Na sekundar je priključen potrošač R_2 . Indukovana stuja u sekundaru stvara pad napona na potrošaču.

$$\Rightarrow U_2 = I_2 R_2$$

Pad napona je jednak indukovanoj elektromotornoj sili jer nema drugih izvora napona.

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = U_2$$

$$-\varepsilon_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \Rightarrow U_0 \cos \omega t = L_1 \frac{dI_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_2}{dt}$$

$$-\varepsilon_2 = M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} \Rightarrow -I_2 R_2 = \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

Ako se prva jednačina pomnoži sa $\sqrt{L_2/L_1}$, a zatim oduzme od druge direktno se dobija I_2 . Smenom tog izraza u prvu jednačinu dobija se I_1' , odnosno nakon integracije I_1 .

$$I_2 = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{U_0}{R_2} \cos \omega t$$

$$I_1 = \frac{U_0}{\omega L_1} \sin \omega t + \frac{L_2}{L_1} \frac{U_0}{R_2} \cos \omega t$$

Na sekundaru se može dobiti znatno veći napon od primarnog. Međutim, to ne znači da je narušen zakon o održanju energije. Naime,

$$\Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_2 R_2}{U_1} = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = -\frac{N_2}{N_1}$$

Srednja snaga primara

$$\blacktriangleright \langle P_1 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I_1 U_1 dt = \frac{L_2}{2L_1} \frac{U_0^2}{R_2} = \frac{1}{T} \int_0^T I_2 U_2 dt = \langle P_2 \rangle$$

Srednja snaga sekundara

95. Energija magnetnog polja

U opštem slučaju, u nekom izolovanom, nepokretnom i kvazistatičkom sistemu postoje naelektrisanja u mirovanju i kretanju koja stvaraju električno polje E , koje potiče od samih naelektrisanja ali i od promenljivog magnetnog polja (lekcija 85). Takvom sistemu se dovodi energija, što može da se prikaže ekvivalentnim spoljašnjim (eksternim) električnim poljem E_e . Ukupna gustina struje u sistemu se dobija iz *Ohm*ovog zakona (Sveska II) u diferencijalnom obliku.

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E}_e + \vec{E}) \quad \triangleright \quad \frac{1}{\sigma} \vec{J} = \vec{E}_e - \text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Kad se jednačina skalarno pomnoži sa $\vec{J}$, preuredi redosled sabiraka i integri po zapremini koji zauzima sistem, dobija se jednačina snage. Leva strana jednačine je snaga koja se dovodi sistemu, a desna strana pokazuje kako je ta snaga raspoređena. Prvi sabirak je snaga *Joule*ovih gubitaka. Drugi i treći član potrebno je transformisati, kao što sledi. U trećem koraku transformacije zapreminski integrali prelaze u površinske. Ovi površinski integrali su jednaki nuli jer integrandi teže nuli bar kao $1/r^3$, dok se zapremina širi kao r^2 . Očigledno da ovi sabirci predstavljaju snage koje apsorbuju električno i magnetno polje, respektivno.

$$\begin{aligned} \int_V \vec{E}_e \vec{J} dV &= \frac{1}{\sigma} \int_V J^2 dV + \int_V \vec{J} \text{grad} \varphi dV + \int_V \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \vec{J} dV \\ \underbrace{\int_V \vec{E}_e \vec{J} dV}_{\text{div}(\varphi \vec{J}) = \vec{J} \text{grad} \varphi - \varphi \text{div} \vec{J}} &\quad \underbrace{\int_V \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \vec{J} dV}_{\text{div}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \times \vec{H}\right) = \vec{H} \text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{rot} \vec{H}} \\ \int_V \vec{J} \text{grad} \varphi dV &= \int_V \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \text{div}(\varphi \vec{J}) dV & \int_V \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \vec{J} dV &= \int_V \vec{H} \text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV - \int_V \text{div}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \times \vec{H}\right) dV \\ \int_V \vec{J} \text{grad} \varphi dV &= \int_V \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_S (\varphi \vec{J}) d\vec{S} & \int_V \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \vec{J} dV &= \int_V \vec{H} \text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV - \oint_S \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \times \vec{H}\right) d\vec{S} \\ \int_V \vec{J} \text{grad} \varphi dV &= \int_V \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} dV & \int_V \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \vec{J} dV &= \int_V \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV \\ \int_V \vec{E}_e \vec{J} dV &= \frac{1}{\sigma} \int_V J^2 dV + \int_V \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV \\ \underbrace{\int_V \vec{E}_e \vec{J} dV}_{\text{Snaga izvora (Sveska II)}} &\quad \underbrace{\frac{1}{\sigma} \int_V J^2 dV}_{\text{Snaga Jouleovih gubitaka (Sveska II)}} &\quad \underbrace{\int_V \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_{\text{Snaga električnog polja (Sveska I)}} &\quad \underbrace{\int_V \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV}_{\text{Snaga magnetnog polja}} \end{aligned}$$

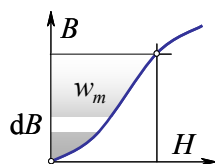
Uspostavljanju struje u sistemu protivi se elektromotorna sila samo-indukcije koja električnom polju dodaje vrtložnu komponentu. Izvor napajanja ulaže rad da bi savladao tu prepreku i time deponuje deo energije u magnetno polje. Za elementarno vreme dt jačina magnetnog polja se poveća za dB .

Magnetna energija je zbir svih priraštaja u toku procesa uspostavljanja struje, odnosno magnetnog polja. Za praktičan proračun energije potrebno je poznavanje krive magnećenja, odnosno krive prvobitnog magnećenja, ako sistem nema istoriju. Gustina energije w_m je jednaka površini koju ova kriva gradi sa ordinatom (osa magnetnog polja).

Za linerane sisteme je $B = \mu H$ i izraz za energiju može da se napiše u sledećem obliku,

$$W_m = \frac{1}{2\mu} \int_V B^2 dV = \frac{\mu}{2} \int_V H^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dV.$$

$$\begin{aligned} dW_m &= \int_V \vec{H} d\vec{B} dV \\ W_m &= \int_V \int_0^B \vec{H} d\vec{B} dV \\ w_m &= \int_0^B \vec{H} d\vec{B} \end{aligned}$$



• Drugim rečima, spoljašnji izvor napona U mora u celosti da savlada elektromotornu silu samoindukcije, $U + \varepsilon = 0$ (lekcije 88 i 94). Ako nema gubitaka, tada se celokupna energija izvora troši na vršenje tog rada, tj. na formiranje magnetnog polja, $dW_m = UI dt$, odnosno

$$\frac{dW_m}{dt} = -\varepsilon I = LI \frac{dI}{dt} \quad \triangleright \quad dW_m = LI dI \quad \triangleright \quad W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

Ako se upotrebe ranije izvedeni izrazi za fluks, prvo pomoću koeficijenta samoindukcije (lekcija 88), a zatim pomoću magnetnog vektor potencijala (lekcija 39) dobijaju se još dve korisne formule za proračun magnetne energije,

$$\Phi = LI \quad \triangleright \quad W_m = \frac{1}{2} \Phi I \quad \text{kao i} \quad \Phi = \oint_C \vec{A} d\vec{l} \quad \triangleright \quad W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{J} dV$$

U poslednjem izrazu za energiju integracija se vrši po celoj zapremini u kojoj teče struja. Međutim, integracija po zapremini koja je veća od one zaposednute strujama, dovodi do istog rezultata, jer je u proširenom delu takve zapremine gustina struje jednaka nuli. Takvim razmišljanjem dolazi se do zaključka da je magnetna energija lokalizovana u prostoru gde su lokalizovane struje.

Sa druge strane, pomoću uopštenog *Ampèreovog* zakona gustina struje može da se izrazi preko magnetizacionog polja (lekcija 49), $\vec{J} = \text{rot} \vec{H}$.

Dalje, potpuno istim transformacijama koje su već primenjene kod jednačine bilansa snaga, izraz za energiju može da se dovede do oblika koji analogan izrazu za snagu. Jedina razlika je što se u izrazima za energiju pojavljuje magnetni vektor potencijal, a u ovima za snagu izvod ovog vektora po vremenu. Istim rezonovnjem, kao i malopre, zaključuje se da površinski integral teži nuli. Dakle, u integraciji po celom prostoru ostaje samo prvi član.

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \operatorname{rot} \vec{H} dV$$

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{H}$$

$$\vec{A} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{A} - \operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{H})$$

$$\vec{A} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{H} \vec{B} - \operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{H})$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dV - \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{H}) dV$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dV - \frac{1}{2} \int_S (\vec{A} \times \vec{H}) d\vec{S}$$

Izraz za energiju, u kome se pojavljuje isključivo magnetno polje, je potpuno isti kad se izvede na dva načina, ako su to uopšte dva načina.

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dV$$

- Na osnovu ovog izraza može da se zaključi da je energija lokalizovana u celom prostoru gde magnetno polje postoji, a ne u prostoru ispunjenom strujama, kako je prethodno zaključeno. Gde je lokalizovana magnetna energija? Logično je da je magnetna energija lokalizovana u istom prostoru u kome je već lokalizovana energija električnog polja (lekcija 21). Gde je magnetna energija nakon završetka procesa uspostavljanja struje?

Pošto je energija sposobnost sistema da vrši rad, a magnetno polje ne vrši rad (lekcija 18), izgleda nelogično da se energija deponuje u magnetnom polju. Međutim, nastajanje struje u sistemu prati promenljivo magnetno polje, a promenljivo magnetno polje, prema *Faradayevom* zakonu, prati promenljivo električno polje i protiv sila tog polja se vrši rad. Uloženi rad odlazi u formiranje magnetnog polja. Proces je obrnut kad struja u sistemu nestaje. Tada sile promenljivog električnog polja vrše rad tj. magnetno polje sistemu vraća uloženu energiju. U linearnim sistemima energija se vraća bez ostatka. Kad sistem sadrži feromagnetne materijale, samo deo uložene energije može da se vrati razgradnjom magnetnog polja. Deo energije je nepovratno utrošen na magnećenje materijala. Gde je energija između ta dva procesa? Zato o energiji magnetostatičkog polja govore samo oni koji sebi nisu postavili prethodna pitanja.

- Postoji značajna sličnost izraza za energiju magnetnog polja i izraza za energiju električnog polja (Sveska I). Ta sličnost ima svoje korene u definicijama induktivnosti i kapacitivnosti.

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad C = \frac{Q}{U}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} \quad \longleftrightarrow \quad W_e = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \vec{A} \vec{J} \quad \longleftrightarrow \quad W_e = \frac{1}{2} \varphi \rho$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI \quad \longleftrightarrow \quad W_e = \frac{1}{2} QU$$

- Kod proračuna koeficijenta samoindukcije debljina provodnika mora da se uzme u obzir, a tada se javljaju teškoće oko definicije fluksa (lekcije 90-92). Ovaj problem treba izbeći, ako je moguće, tako što se proračun izvrši preko izraza za energiju konture.

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

$$L = \frac{2W_m}{I^2}$$

- Prilikom proračuna energije integracija se vrši po celokupnoj zapremini. Zapremina koju zauzimaju provodnici je unutrašnji domen, a ostatak prostora je spoljašnji domen.

Prema tome ukupna energija može da se predstavi kao zbir energije lokalizovane u polju u provodnicima (interna energija) i energije lokalizovane u polju van provodnika (eksterna energija). U opštem slučaju magnetne permeabilnosti sredina su različite. Koeficijent samoindukcije je zbir dva koeficijenta - tj. zbir unutrašnje i spoljašnje induktivnosti.

$$L_i = \frac{1}{I^2} \int_{V_i} \vec{B} \vec{H} dV$$

$$L_e = \frac{1}{I^2} \int_{V_e} \vec{B} \vec{H} dV$$

$$L = L_e + L_i$$

- U opštem slučaju raspodela struje u provodniku zavisi od učestanosti (lekcija 105). Zbog toga od učestanosti zavisi i raspodela magnetnog polja, a posledično vrednosti koeficijenta indukcije. Ako su provodnici tanki spoljašnja induktivnost ne zavisi bitno od raspodele struje, jer je magnetno polje van provodnika isto kao da struja teče po osi provodnika. Međutim, unutrašnja induktivnost uvek zavisi od učestanosti. Koeficijenti indukcije su statički ili dinamički zavisno od toga da li su računati pod uslovima kvazistatičnosti ili ne.

- Neka je posmatrani sistem provodna kontura C u kojoj deluje izvor napona U i koja ima svoju otpornost R i induktivnost L . Kad se diferencijalni oblik *Ohmovog* zakona skalarno pomnoži elementom konture $d\vec{l}$ i integriše po celom obimu konture dobija se jednačina napona koja ima formu II *Kirchhoffovog* zakona.

$$\oint_C \vec{E}_e d\vec{l} = \frac{1}{\sigma} \oint_C \vec{J} d\vec{l} + \oint_C \text{grad } \varphi d\vec{l} + \oint_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l}$$

$$\oint_C \vec{E}_e d\vec{l} = \sum \varepsilon_e \quad \vec{J} = \frac{I}{S} d\vec{l} \quad \text{grad } \varphi = -\vec{E} \quad \frac{d}{dt} \oint_C \vec{A} d\vec{l} = \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\sum \varepsilon_e = U \quad \oint_C \frac{I}{\sigma S} d\vec{l} = RI \quad \oint_C \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

$$U = IR + L \frac{dI}{dt}$$

96. Energija solenoida

Sve formule koje su izvedene za energiju uključuju integraciju po zapremini, mada se to eksplicitno ne vidi kod formule za proračun energije preko induktivnosti. Sistemi koji imaju bar jednu beskonačnu dimenziju imali bi beskonačnu energiju. U takve sisteme spadaju dvožični vodovi, koaksijalni vodovi i usamljeni provodnici. U stvari, te sisteme smatramo veoma dugim. U posmatranom delu zapremine, oko nekog poprečnog preseka, karakteristike od značaja za problem su konstantne. Takođe, ako povratni vod nije obuhvaćen sistemom, smatra se da je daleko tako da ne utiče na polje u posmatranom delu zapremine. Tipičan primer je beskonačan solenoid kroz koji protiče stalna struja. U solenoidu konačne dužine, jačina magnetnog polja na krajevima opada na polovinu vrednosti koju ima na sredini ose (lekcija 38). Ako je solenoid veoma dug (beskonačan) polje se može smatrati konstantnim i dobija se rezultat koji inače daje primena *Ampèreovog* zakona (lekcija 24 ili 53). Induktivnost beskonačnog solenoida je takođe beskonačna. Zbog toga se induktivnost i energija solenoida računaju po jedinici dužine, a to važi i za vodove.

- Proračun energije preko induktivnosti

$$W'_m = \frac{1}{2l} LI^2 = \frac{1}{2} L' I^2 = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\mu \frac{N^2 S}{l^2}}_{\text{lekcija 88}} \cdot I^2$$

- Proračun energije preko magnetnog vektor potencijala

$$W'_m = \frac{1}{2l} \oint_C \vec{A} I d\vec{l} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{A} \vec{J}_S d\vec{l} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\mu NI}{2l}}_{\text{lekcija 45}} a \hat{\theta} \cdot \underbrace{\frac{NI}{l} \hat{\theta}}_{\text{lekcija 53}} \cdot 2\pi r = \frac{1}{2} \mu \frac{N^2 S}{l^2} I^2$$

- Proračun energije preko jačine magnetnog polja

$$W'_m = \frac{1}{2l} \int_V \vec{B} \vec{H} dV = \frac{1}{2l} \cdot \underbrace{\mu \frac{NI}{l}}_{\text{lekcija 24}} \cdot \underbrace{\frac{NI}{l}}_{\text{lekcija 53}} \cdot Sl = \frac{1}{2} \mu \frac{N^2 S}{l^2} I^2$$

- Tri formule za energiju daju alternativnu mogućnost za proračun koeficijenta samoindukcije (lekcija 95).

$$L = \frac{2W'_m}{I^2}$$

Proračun koeficijenta samoindukcije može da bude veoma složen problem (lekcija 90) i često je jednostavnije izračunati energiju sistema pomoću jačine magnetnog polja, pa zatim iz energije izračunati induktivnost.

97. Unutrašnja induktivnost pravog provodnika

Izračunavanje induktivnosti pravog provodnika je jedan od elementarnih problema koji se javlja u svim proračunima u kojima debljinu provodnika nije moguće zanemariti. Magnetnu energiju provodnika poluprečnika a i konačne dužine l je najlakše izračunati pomoću jačine magnetnog polja (lekcija 22).

$$B = \frac{\mu I}{2\pi a^2} r, \quad r \leq a$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu} \int_V B^2 dV$$

$$dV = r dr d\theta dz$$

$$W_m = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu I}{2\pi a^2} \right)^2 \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^l r^2 r dr d\theta dz = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu I}{2\pi a^2} \right)^2 2\pi l \int_0^a r^3 dr = I^2 l \frac{\mu}{16\pi}$$

Integracija je izvršena po zapremini zaposednutoj provodnikom i to je unutrašnja (interna) energija. Shodno tome, izračunava se unutrašnja podužna induktivnost provodnika. Dobijeni izraz, kao i do sada izvedeni, važi samo u kvazistatičkom slučaju.

$$L'_i = \frac{2W_m}{I^2 l} = \frac{2W_m''}{I^2}$$

$$L'_i = \frac{\mu}{8\pi}$$

Ukupna induktivnost sistema je zbir spoljašnje (eksterne) i unutrašnje (interne) induktivnosti. U tom smislu treba uopštiti ranije izvedne formule.

$$L = L_e + L_i$$

Kružni zavojak (lekcija 90)	Prav provodnik (lekcija 91)	Dvožični vod (lekcija 92)
$L \approx \mu_0 a \left(\ln \frac{8a}{r_0} - 2 \right) + \frac{2\pi a \mu}{8\pi}$	$L \approx \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \frac{2l}{r_0} - 1 \right] + \frac{\mu l}{8\pi}$	$L' \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r_0} + \frac{2\mu}{8\pi}$

98. Podužna induktivnost koaksijalnog voda

Direktnom primenom postupka za proračun energije preko jačine polja i proračun induktivnosti preko energije za koaksijalni vod (lekcija 23) se dobijaju sledeći rezultati.

$$B_1 = \frac{\mu I}{2\pi a^2} r, \quad 0 \leq r \leq a \quad \triangleright \quad L'_{i1} = \frac{\mu}{8\pi}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad a \leq r \leq b \quad \triangleright \quad L'_{e2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$B_3 = \frac{\mu I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}, \quad b \leq r \leq c \quad \triangleright \quad L'_{i3} = \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right)$$

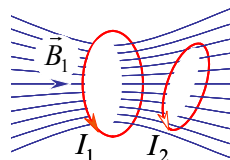
Podužna induktivnost



$$L' = L'_{i1} + L'_{e2} + L'_{i3}$$

99. Energija induktivno spregnutih kontura

Razmatranje koje važi za sistem koji se sastoji od n zatvorenih kontura može se, bez gubljenja na opštosti, prikazati za sistem od dve konture. U stacionarnom stanju kroz dve konture protiču stalne struje I_1 i I_2 . Koliko energije je uloženo?



Naka se u prvoj konturi uspostavlja struja I_1 .

Druga kontura je u početku otvorena, $I_2 = 0$.



$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

Prvi generator ulaže energiju W_1 .

U drugoj konturi se sada uspostavlja struja I_2 .

U prvoj konturi se održava stalna struja I_1 .



$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Drugi generator ulaže energiju W_2 .

Zbog pojave struje I_2 u prvoj konturi se javlja elektromotorna sila međusobne indukcije ε_1 .



$$\varepsilon_1 = -M \frac{dI_2}{dt}$$

Da bi struja I_1 ostala stalna, prvi generator ulaže dodatnu energiju W_{12} savladavajući ε_1 .



$$W_{12} = M I_1 I_2$$

Ukupna energija sistema je W .



$$W = W_1 + W_2 + W_{12}$$

• Drugim rečima, u stacionarnom stanju kroz dve konture protiču dve stalne struje. Energija sistema je energija rezultujućeg polja, koje je pak vektorski zbir komponenti, $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$. Tako se čisto matematičkim postupkom dolazi do istog rezultata kao i pomoću fizički zasnovane prethodno sprovedene analize.

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dV \quad \triangleright \quad W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

$$\vec{B} \vec{H} = \vec{B}_1 \vec{H}_1 + \vec{B}_1 \vec{H}_2 + \vec{B}_2 \vec{H}_1 + \vec{B}_2 \vec{H}_2$$

$$W_m = W_{11} + W_{12} + W_{21} + W_{22} \quad \triangleright \quad W_m = \frac{1}{2} (L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_1 I_2 + L_{22} I_2^2)$$

$$\vec{B}_1 \vec{H}_2 = \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2 = \vec{B}_2 \vec{H}_1 \quad \triangleright \quad L_{12} = L_{21} = M$$

$$W_m = W_{11} + 2W_{21} + W_{22} \quad \triangleright \quad W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

U linearnim sredinama, rad koji izvrše generatori napona, savladavajući indukovane elektromotorne sile prilikom uspostavljanja struja, u celosti se transformiše u magnetnu energiju. Energija magnetnog polja ne zavisi od

načina i redosleda uspostavljanja struja, što je u skladu sa zakonom o održanju energije. Da nije tako, uvek bi se mogao pronaći takav način razgradnje magnetnog polja pri kome bi energija koju polje vraća bila veća od energije koja je uložena u njegovu gradnju.

- Iz izraza za energiju dve spregnute konture uopštavanjem se dobija izraz za energiju sistema od n kontura.

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} I_i I_j$$

- Izraz za energiju dve spregnute konture može da se napiše u obliku u kome figuriše odnos struja u konturama $x = I_2 / I_1$.

$$W_m = I_1^2 \left(\frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_2 \frac{I_2^2}{I_1^2} + M \frac{I_2}{I_1} \right) \quad \triangleright \quad W_m = I_1^2 \left(\frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_2 x^2 + M x \right)$$

Iz ovog oblika može da se odredi ekstremna vrednost, izjednačavanjem prvog izvoda sa nulom. Pošto je drugi izvod uvek pozitivna veličina, ekstremna vrednost je minimum.

$$\frac{dW_m}{dx} = I_1^2 (L_2 x + M) = 0 \quad \triangleright \quad x = -\frac{M}{L_2} \quad \triangleright \quad W_{m_{\min}} = \frac{I_1^2}{2} \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right)$$

Energija je uvek nenegativna veličina, te odatle sledi uslov za koeficijente indukcije. U opštem slučaju međusobna induktivnost se izražava pomoću koeficijenta sprege k .

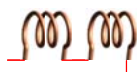
$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

- Kad kroz dve induktivnosti protiče ista struja (na primer, dva solenoida u rednoj vezi) izraz za energiju može da se napiše u obliku u kome figuriše ekvivalentna induktivnost.

$$W = \frac{1}{2} L_1 I^2 + \frac{1}{2} L_2 I^2 + M I^2 = \frac{1}{2} L_e I^2 \quad \triangleright \quad L_e = L_1 + L_2 \pm |2M|$$

Međutim, induktivna sprega između dva elementa sistema zavisi od geometrijskih odnosa (i od smerova struje što se svodi na međusobni položaj) i može da bude pozitivna, negativna i jednaka nuli.



$$L_1 + L_2 + 2M$$



$$L_1 + L_2 - 2M$$



$$L_1 + L_2 - 2M$$



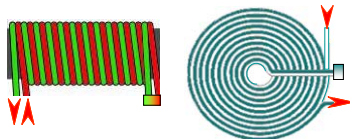
$$L_1 + L_2$$

Menjanjem međusobnog položaja kalemova podešava se i ekvivalentna induktivnost, a uređaji su nazvani promenljivi induktori ili variometri. Teorijski je moguće postići nultu induktivnost.



• Induktivnost je često nepoželjna karakteristika, na primer, kod žičanih otpornika kod kojih se otporna žica namotava u obliku kalema ili ravne spirale. Spiralni solenoid zanemarljive samoinduktivnosti, koji je Tesla patentirao kao kalem za elektromagnet 1894. godine, danas je široko poznat kao Teslina palačinka (*Tesla pancake*).

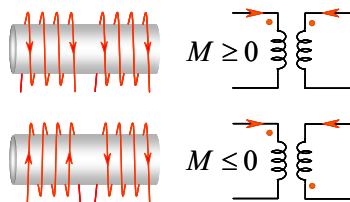
Da bi se induktivnost svela na najmanju moguću vrednost koristi se bifilarno (Lat. *bi* - dva, *filum* - nit) motanje. Kad se na jednom kraju namotaja provodnici spoje, struja kroz dva identična kalema protiče u suprotnim smerovima i ukupna induktivnost je jednaka nuli.



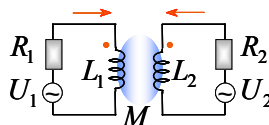
$$L_e = L_1 + L_1 - 2\sqrt{L_1 L_1} = 0$$

• Kad se kalemovi predstavljaju šematski ne postoji mogućnost određivanja znaka koeficijenta međusobne indukcije. Zbog toga je usvojena konvencija o obeležavanju induktivnih elemenata pomoću tačaka. Pošto su u opštem slučaju naponi i struje promenljivi u vremenu, uvodi se referentni smer struje. Referentni smer određuje smer obilaženja po konturi koja sadrži induktivne elemente, a posledično određuje znak koeficijenta međusobne indukcije i indukovane elektromotorne sile.

Neka su induktivni elementi solenoidi. Ako se na osnovu posmatranja utvrdi da je koeficijent međusobne indukcije pozitivan, tačke se crtaju tako da oba referentna smer struje ulaze u solenoide kod nacrtanih tačaka i obrnuto.



• U svakom od dva induktivno spregnuta kola deluju po tri elektromotorne sile. Prva potiče od dejstva generatora, druga od dejstva samoindukcije i treća od dejstva međusobne indukcije.

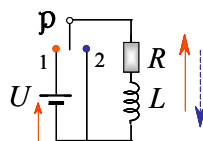


$$\begin{aligned} \text{Jačine struja u} & \quad I_1 = \frac{U_1 + \varepsilon_{s1} + \varepsilon_{m1}}{R_1} \quad \triangleright \quad U_1 = I_1 R_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ \text{kolima se mogu} & \\ \text{izraziti u formi} & \\ \text{Ohmovog zakona.} & \quad I_2 = \frac{U_2 + \varepsilon_{s2} + \varepsilon_{m2}}{R_2} \quad \triangleright \quad U_2 = I_2 R_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \end{aligned}$$

Do istog sistema diferencijalnih jednačina se dolazi i ako se jednačina bilansa energije za jednu konturu (lekcija 95) uopšti za slučaj dve ili više spregnutih kontura.

100. Struja u kolu sa otpornikom i kalemom - RL kolo

Data je redna veza otpornika R i kalema L . Ovi elementi, i pred toga što se prikazuju posebno, nisu obavezno koncentrisani jer svaki provodnik ima svoju induktivnost i svaki kalem ima svoju otpornost.



► **NEMOJ DA DOLAZIŠ.** Kad se RL kombinacija priključi na izvor jednosmernog napona u kolu se trenutno pojavljuje indukovana elektromotorna sila koja se protivi struji koja se iznenada pojavila. Priključeni napon savladava elektromotornu silu samoindukcije i u kolu se postepeno uspostavlja stacionarno stanje u kome teče jednosmerna struja stalne jačine $I_0 = U / R$.

► **NEMOJ DA ODLAZIŠ.** U stacionarnom stanju izvor napajanja se isključi prespajanjem krajeva RL kombinacije. Istovremeno sa isključivanjem napona, u kolu se pojavljuje elektromotorna sila koja koja bezuspešno pokušava da održi struju koja nestaje, čak skokom varnice ako električno kolo nije zatvoreno. Kad se sva energija akumulirana u magnetnom polju utroši struja pada na nultu vrednost, $I = 0$.

Prelazni režim	▼ Uključivanje	Isključivanje ▲
Diferencijalna jednačina električnog kola	$U = RI + L \frac{dI}{dt}$	$0 = RI + L \frac{dI}{dt}$
Početni uslov	$t = 0, \quad I = 0$	$t = 0, \quad I = I_0$
Stacionarni režim	$t \rightarrow \infty \quad I = I_0$	$t \rightarrow \infty \quad I = 0$
Oblik koji razdvaja promenljive	$\frac{dI}{I_0 - I} = \frac{R}{L} dt$	$\frac{dI}{I} = \frac{R}{L} dt$
Rešenje diferencijalne jednačine	$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$	$I = I_0 \left(e^{-\frac{R}{L}t} \right)$

Odnos $\tau = L / R$ je vremenska konstanta, a recipročna vrednost $\alpha = 1 / (2\tau)$ je faktor prigušenja. Što je induktivnost veća prelazni režim je duži. Teorijski, stacionarno stanje se uspostavlja nakon beskonačnog vremena. Praktično, potrebno je nekoliko vremenskih konstanti. Dobijene rezultate treba uporediti sa onima (Sveska II) koji se dobijaju za punjenje i pražnjenje kondenzatora preko otpornika.

U linearnim sredinama, gde magnetna permeabilnost ne zavisi od jačine polja, energija magnetnog polja je jednaka radu koji izvor napajanja utroši

za uspostavljanje magnetnog polja. Ako se jednačina uspostavljanja struje u kolu pomnoži članom $I dt$, dobija se jednačina energetske bilansa,

$$U = RI + L \frac{dI}{dt} \quad | \cdot (I dt) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} UI dt = RI^2 dt + LI dI \\ dW_u = dW_J + dW_m \end{cases}$$

Energija izvora napajanja
Energija Jouleovih gubitaka
Energija magnetnog polja

Leva strana jednačine predstavlja energiju koju izvor troši u toku uspostavljanja struje u kolu. Desna strana jednačine pokazuje kako se ta energija raspoređuje. Prvi sabirak predstavlja *Jouleove* gubitke, a drugi energiju koje se zbog samoindukcije pretvara u magnetnu. Na kraju prelaznog režima struja dobija svoju stacionarnu vrednost. U stacionarnom režimu (struja je konstantna) nema pada napona na kalemu i napon izvora jednak je padu napona na otporniku. Međutim, u magnetnom polju je akumulirana energija koja može biti vraćena izvoru ili pretvorena u neki drugi vid energije.

Izraz za energiju koja je sadržana u magnetnom polju kalema je analogan sa izrazom za energiju koja je sadržana u električnom polju kondenzatora

$$\left| \begin{aligned} W_m &= L \int_0^{I_0} I dI = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad \triangleright \quad W_m = \frac{1}{2} \Phi I_0 \\ W_e &= C \int_0^Q q dt = \frac{1}{2} C Q^2 \quad \triangleright \quad W_e = \frac{1}{2} U Q \end{aligned} \right.$$

- Neka je induktivnost u kolu dugačak solenoid ili torus. Tada je

$$W_m = \frac{1}{2} \Phi I_0 = \frac{1}{2} B S I_0 = \frac{\mu}{2} \frac{N^2 I_0^2}{l} S = \frac{\mu^2}{2\mu} \frac{N^2 I_0^2}{l^2} S l = \frac{1}{2\mu} B^2 V = \frac{1}{2} B H V,$$

gde je V zapremina solenoida. Dobijeni izraz, takođe analogan sa izrazom za energiju električnog polja (sveska I), pokazuje da je energija lokalizovana u polju.

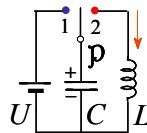
- Ukupna energija sadržana u polju je reverzibilna i u potpunosti se vraća prilikom isčezavanja polja. U posmatranom slučaju energija ne može da bude vraćena izvoru (jer je isključen) i transformiše se u *Jouleove* gubitke.

Energija koja se oslobodi na otporniku
Energija magnetnog polja kalema

$$\left[W_J = R \int_0^\infty I^2 dt = R I_0^2 \int_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}t} dt = \frac{1}{2} L I_0^2 = W_m \right]$$

101. Pražnjenje kondenzatora preko kalema - LC kolo

Neka je kondenzator inicijalno priključen na napon U i tako napunjen količinom naelektrisanja $Q = CU$. U trenutku $t = 0$ kondenzator se preklopnikom prespoji na kalem.



Uspostavljanje struje u kolu znači smanjivanje količine naelektrisanja u kondenzatoru, pa je $I = -dQ/dt$. Istovremeno se pojavljuje indukovana elektromotorna sila $\varepsilon = -L dI/dt = L d^2Q/dt^2$. Kako nema spoljašnjih izvora, diferencijalna jednačina ovog kola je $U + \varepsilon = 0$. Međutim, do iste jednačine, sasvim elegantno, se dolazi i iz jednačine energetskog bilansa.

Energija kola u nekom trenutku posle prebacivanja preklopnika.

$$\Rightarrow W = W_e + W_m = \frac{1}{2C} Q^2 + \frac{L}{2} I^2$$

Kad nema generatora i otpornosti energija se ne menja u vremenu, $dW/dt = 0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{C} Q \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0$$

Uspostavljanjem struje količina naelektrisanja u kondenzatoru se smanjuje, $I = -dQ/dt$.

$$\Rightarrow \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + L \frac{dQ}{dt} \frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

Konstanta ω_0 je sopstvena učestanost.

$$\Rightarrow \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

Diferencijalna jednačina električnog kola.

$$\Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_0^2 Q = 0$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} Q &= C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t \\ I &= -\omega_0 C_1 \cos \omega_0 t + \omega_0 C_2 \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Početni uslovi

$$\Rightarrow t = 0, I = 0 \quad t = 0, Q = CU$$

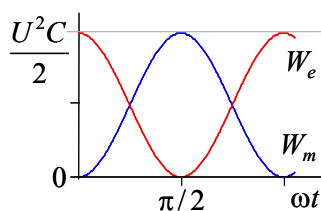
Iz početnih uslova se dobija $C_1 = 0$ i $C_2 = UC$.

$$\begin{aligned} Q &= UC \cos \omega_0 t \\ I &= U\omega_0 C \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Energija električnog kola tokom vremena se ne menja.

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} U^2 C (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t)$$

U prvoj četvrtini perioda kondenzator se prazni, jačina struje raste, električna energija se transformiše u magnetnu. Već u drugoj četvrtini magnetno polje vraća energiju električnom polju.

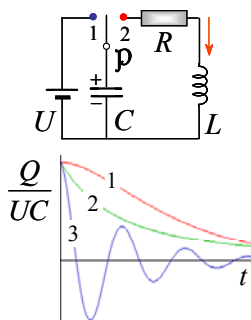


102. Otpornik, kalem i kondenzator - RLC kolo

Realno električno kolo uvek ima otpornost, bar onu koja potiče od kalema i provodnika. Jedini izvor u kolu je napunjeni kondenzator, pa je kao i u prethodnom slučaju $I = -dQ/dt$.

U svakom trenutku snaga *Joule*ovih gubitaka na otporniku je jednaka brzini smanjenja elektromagnetne energije,

$$\frac{dW}{dt} = -RI^2 \quad \triangleright \quad \frac{1}{C}Q \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} + RI^2 = 0$$



Sa već uvedenim oznakama $\alpha = R/(2L)$ i $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ sledi razmatranje:

Diferencijalna jednačina	$\Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0$
Početni uslovi	$\Rightarrow t = 0, I = 0 \quad t = 0, Q = CU$
Karakteristična jednačina	$\Rightarrow k^2 + 2\alpha k + \omega_0^2 = 0$
Koreni karakteristične jednačine	$\Rightarrow k_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$
Opšte rešenje	$\Rightarrow Q = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$

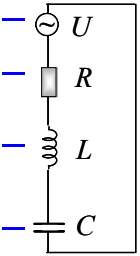
Mogući su sledeći slučajevi:

0 Nema prigušenja	$R = 0$	$k_{1,2} = \pm j\omega_0$	(lekcija 101)
1 Kritično prigušenje	$R = 2\omega_0 L$	$k_{1,2} = -\alpha$	
$Q = (C_1 + C_2 t)e^{-\alpha t}$	$\Rightarrow$	$Q = CU(1 + \alpha t)e^{-\alpha t}$ $I = CU\alpha^2 t e^{-\alpha t}$	
2 Nadkritično prigušenje	$R > 2\omega_0 L$	$k_{1,2} = -\alpha \pm \beta, \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$	
$Q = C_1 e^{-(\alpha+\beta)t} + C_2 e^{-(\alpha-\beta)t}$	$\Rightarrow$	$Q = CUe^{-\alpha t} \left(\cosh \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta t \right)$ $I = CU \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sinh \beta t$	
3 Podkritično prigušenje	$R < 2\omega_0 L$	$k_{1,2} = -\alpha \pm \omega, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$	
$Q = (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t)e^{-\alpha t}$	$\Rightarrow$	$Q = UC e^{-\alpha t} \cos \omega t$ $I = \omega UC e^{-\alpha t} \left(\sin \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t \right)$	

- Neka u RLC kolu deluje generator prostoperiodičnog napona. Rešenje diferencijalne jednačine se pretpostavlja u prostoperiodičnom obliku.

$$\frac{1}{C}Q + L \frac{dI}{dt} + RI = U \quad \text{— Prinudne oscilacije u } RLC \text{ kolu}$$

$U = U_0 \sin \omega t$
 $I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$
 $\frac{dI}{dt} = \omega I_0 \cos(\omega t - \varphi)$
 $Q = -\frac{1}{\omega} I_0 \cos(\omega t - \varphi)$



$[\Omega] \quad \downarrow$
 R
 $X_L = \omega L$
 $X_C = \frac{1}{\omega C}$

$$-\frac{1}{\omega C} I_0 \cos(\omega t - \varphi) + \omega L I_0 \cos(\omega t - \varphi) + R I_0 \sin(\omega t - \varphi) = U_0 \sin \omega t$$

Iz dobijene jednačine treba odrediti amplitudu i fazu struje u kolu. Trigonometrijske funkcije razlike dva ugla treba razviti, a zatim uporediti levu i desnu stranu jednačine.

Članovi uz $\cos \omega t$	Članovi uz $\sin \omega t$
$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \varphi - R \sin \varphi = 0$	$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin \varphi + R \cos \varphi = \frac{U_0}{I_0}$

Obe jednačine se kvadriraju, a zatim saberu. Dobija se izraz za nepoznatu amplitudu struje. Oдавde je jasno odakle potiču pojmovi koje je uveo Heaviside (lekcija 11).

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}$$

$$I_0 = U_0 / Z$$

Induktivna i kapacitivna reaktansa

$$X_L = \omega L, \quad X_C = 1/\omega C$$

Ukupna reaktansa i impedansa

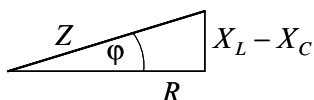
$$X = X_L - X_C, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Kolo je u rezonansi za $\omega = \omega_0$.

$$X_L = X_C, \quad X = 0, \quad Z = R$$

Iz prve jednačine se donija fazni stav.

$$\tan \varphi = X / R$$



$$\cos \varphi = R / Z$$

$$\sin \varphi = X / Z$$

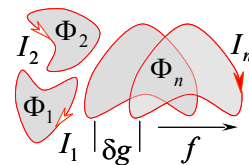
Srednja snaga na impedansi se dobija ako se proizvod trigonometrijskih funkcija transformiše u zbir i zatim integriše za jedan period.

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T UI dt = \frac{U_0 I_0}{2T} \cos \varphi \int_0^T dt - \frac{U_0 I_0}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt = \frac{1}{2} I_0^2 R$$

103. Energija i sila

Na osnovu ukupne energije sistema je moguće odrediti rezultatne sile (i momente) koje deluju u sistemu. Metod je zasnovan na zakonu o održanju energije, a poznat je kao metod virtuelnih pomeraja (Sveska I).

Virtuelni pomeraj je zamišljena elementarna promena neke koordinate sistema, tokom koje vreme ne teče. Zamišljeno pomeranje nekog elementa sistema znači da je izvršen virtuelni rad (Lat. *virtualis* - skoro takav, ima osobine), koji je rezultat delovanja uopštene sile f duž uopštene koordinate g .



$$\delta A = f \delta g$$

Ako je g dužina, tada je f sila, a ako je g ugao, tada je f moment sile. Pomeranje nekog elementa u sistemu znači promenu geometrijskih odnosa, a to znači promenu svih kapacitivnosti i induktivnosti koje su funkcije samo geometrijskih odnosa (ϵ i μ su konstantne veličine).

Po definiciji kapacitivnost je odnos količine naelektrisanja i potencijala, a induktivnost je odnos fluksa i struje, pa sledi razmatranje:

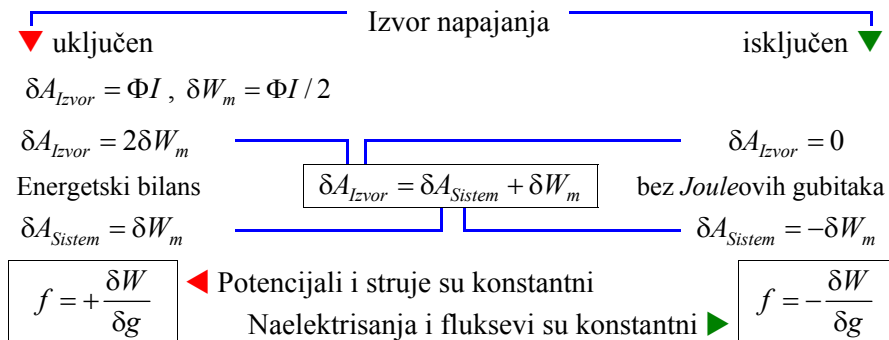
$$C = q / \varphi$$

$$L = \Phi / I$$

► Ako je tokom vršenja rada sistem uključen na izvor napajanja, potencijali i struje u sistemu ostaju konstantni, a dolazi do preraspodele količina naelektrisanja i flukseva. Rad je izvršen na račun energije izvora. Energija sistema se povećava za priraštaj koji je jednak izvršenom radu.

► Ako tokom vršenja rada sistem nije priključen na izvor napajanja, količine naelektrisanja i fluksevi u sistemu ostaju kakvi su i bili, a dolazi do promena potencijala i struja. Rad je izvršen na račun energije sistema koja se smanjuje za priraštaj koji je jednak izvršenom radu.

Elementarni virtuelni rad δA je brojno jednak virtuelnom priraštaju energije δW , a odatle se dobija izraz za proračun uopštene sile.



Predznak u izrazu za generalisanu silu određuje samo smer sile. U većini slučajeva je jednostavnije smer sile odrediti iz fizičke ralnosti, tj. pomoću smerova struja u sistemu. Primena metoda virtuelnih pomeraja biće ilustrovana na ranije rešavanim primerima.

• Dvožični vod

Ukupna sopstvena induktivnost po jedinici dužine (lekcija 97)	⇒	$L' \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r_0} + \frac{\mu}{4\pi}$
---	---	---

Ukupna magnetna energija po jedinici dužine (lekcija 95)	⇒	$W'_m = \frac{1}{2} L' I^2 = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \left(\ln \frac{d}{r_0} + \frac{\mu_r}{4} \right)$
--	---	---

Sila između provodnika zavisi samo od spoljašnje energije.	⇒	$F' = \frac{dW'_m}{dd} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \frac{d}{dd} \left(\ln \frac{d}{r_0} \right)$
--	---	--

Sila po jedinici dužine (lekcija 31). Smer zavisi od smerova struja u provodnicima.	⇒	$F' = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} \sim I \cdot I$
---	---	--

• Koaksijalne kružne konture

Međusobna induktivnost u slučaju $b \gg a$ (lekcija 87)	⇒	$M = \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{a^2 b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}}$
---	---	---

Spoljašnja energija sistema (lekcija 95)	⇒	$W_m = \frac{1}{2} M I^2 = \frac{\mu_0 \pi I^2}{4} \frac{a^2 b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}}$
--	---	---

Ukupna sila između kontura. Smer zavisi od smerova struja.	⇒	$F = \frac{dW_m}{dz} = \frac{3\mu_0 \pi z a^2 b^2 I^2}{4(b^2 + z^2)^{5/2}} \sim I \cdot I$
--	---	--

• Koaksijalni solenoidi - U širi solenoid (poprečni presek S_1) dužinom z uvučen je uži solenoid (poprečni presek S_2). U najgrubljoj aproksimaciji polja van solenoida su jednaka nuli, tako da samo u zajedničkom delu zapremenime ($V_{12} = S_2 z$) dejstvuju polja koja potiču od oba solenoida.

Ukupna energija sistema (lekcija 95)	⇒	$W_m = \frac{\mu_0}{2} \int_V (H_1 + H_2)^2 dV$
--------------------------------------	---	---

Deo energije u delu preklapanja solenoida.	⇒	$W_{m12} = \mu_0 H_1 H_2 S_2 z$
--	---	---------------------------------

Ukupna sila između solenoida. Smer zavisi od smerova struja.	⇒	$F = \frac{dW_{m12}}{dz} = \mu_0 H_1 H_2 S_2 \sim I_1 \cdot I_2$
--	---	--

104. Noseća sila (elektro)magneta

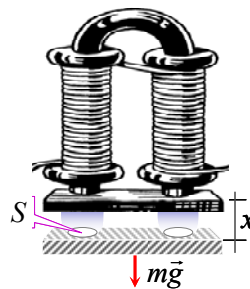
Spoljašnja energija elektromagneta je lokalizovana u vazдушnom procepu tj. između polova i kotve i može da se odredi pomoću prethodno izvedenih formula (lekcija 95).

$$W_m = \frac{B_0^2}{2\mu_0} V = \frac{B_0^2}{2\mu_0} Sx,$$

gde je x rastojanje pola od kotve, S površina procepa i B_0 jačina polja na polu.

Virtuelni pomeraj kotve za δx menja energiju sistema za δW_m , pa sledi

$$f = \frac{\delta W_m}{\delta g} \quad \triangleright \quad F = \frac{dW_m}{dx} \quad \triangleright \quad F = \frac{d}{dx} \frac{B_0^2 S x}{2\mu_0} \quad \triangleright \quad \boxed{F = \frac{B_0^2 S}{2\mu_0}}$$



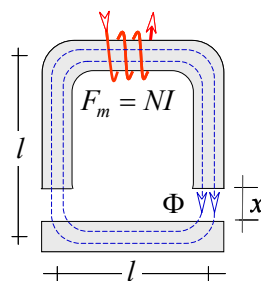
- Neka je, zbog jednostavnosti proračuna, jačina magnetnog polja u vazдушnom procepu $B_0 = 1\text{ T}$ i neka je poluprečnik jezgra potkovičastog elektromagneta $r = 0.02\text{ m}$, tada je noseća sila $F = 1000\text{ N}$. Takva jačina magnetnog polja postiže sa relativno malim dimenzijama i malim jačinama struje. U približnom proračunu može se uzeti da je površina vazдушnog procepa ista kao i površina poprečnog preseka jezgra i da je magnetno kolo linearno (lekcija 74). Za jezgro kvadratnog oblika se onda dobija:

$$R_m = \frac{4l}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{2x}{\mu_0 S}, \quad \Phi = \frac{F_m}{R_m} = \frac{NI}{R_m},$$

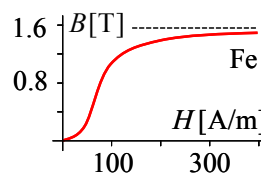
$$B_0 = \frac{\Phi}{S} = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{4l + 2\mu_r x}, \quad \text{i ne zavisi od } S.$$

Ako je

$l = 8\text{ cm}$, $x = 10^{-5}\text{ m}$, $\mu_r = 3000$ i $NI = 100\text{ A}$ sledi $B_0 \approx 1\text{ T}$.



- Neka je jezgo elektromagneta načinjeno od mekog gvožđa. Maksimalana noseća sila se dobija ako u proračun uključi jačina polja pri zasićenju, $B \approx 1.59\text{ T}$. Tada je $\mu_r = 3000$. Snažnija polja bi dovela do pada magnetne permeabilnost materijala (lekcija 57).



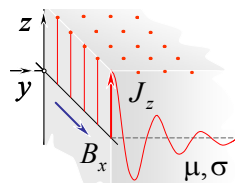
$$F_{\max} / S \approx 10^6 \text{ N/m}^2$$

Teorijski, magnet sa gvozdenim jezgrom može da nosi oko 100 tona po kvadratnom metru pola.

105. Površinski efekat

U cilindričnom provodniku stalnog poprečnog preseka vremenski stalna struja se ravnomerno raspoređuje (lekcija 22). Ako provodnik ima promenljiv presek (ili nije cilindričan) raspodela struje nije ravnomerna ali postoji u celoj zapremini provodnika. Međutim, struje promenljive u vremenu se koncentrišu uz površinu provodnika. Uzrok ove pojave je elektromagnetna indukcija. Promenljive struje stvaraju promenljivo magnetno polje, koje prati indukovano promenljivo električno polje. Ovo električno polje prouzrokuje indukovane struje koje stvaraju sekundarno magnetno polje. Prema zakonu elektromagnetne indukcije sekundarni fluks se suprotstavlja primarnom, tako da je ukupni fluks u provodniku smanjen. Efekat je sve izraženiji što su promene fluksa brže. Na visokim učestanostima struja i polje postoje samo u površinskom sloju provodnika. Pojava je nazvana površinski efekat (Eng. *skin effect*) i prvi je primetio Horace Lamb 1833. godine, proučavajući elektrode sfernog oblika.

Odaberimo jednostavniji problem. Neka se prostoperiodična struja prostire u z pravcu kroz homogeni poluprostor $y \geq 0$. Površno gledano, problem je čisto teorijski. Međutim, svi rezultati koji će biti dobijeni imaju praktični značaj.



Pošto struja teče u z pravcu, magnetno polje ima samo x komponentu (lekcija 26), pa se iz *Ampèreovog* i *Faradyevog* zakona dobija par međusobno povezanih jednačina.

$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$	$\text{rot} \vec{B} = \mu \vec{J}$	$\vec{B} = B_x \hat{x}$	$\frac{dB_x}{dy} = -\mu J_z$
$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	$\text{rot} \vec{J} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\vec{J} = J_z \hat{z}$	$\frac{dJ_z}{dy} = -\sigma \frac{dB_x}{dt}$

Kada se obe jednačine diferenciraju po y , moguće je eliminacijom jedne, pa zatim i druge funkcije, dobiti dve nezavisne jednačine. Kad se struja menja po prostoperiodičnom zakonu, po istom zakonu se menja i magnetno polje. Nakon uvođenja kompleksnog predstavljanja trigonometrijskih funkcija slede dve obične diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima. NA DALJE SU SVE VELIČINE KOMPLEKSNE.

$\frac{d^2 B_x}{dy^2} = -\mu \frac{dJ_z}{dy}$	$\frac{d^2 B_x}{dy^2} = \mu \sigma \frac{dB_x}{dt}$	$B_x = B_m e^{j\omega t}$	$\frac{d^2 B_x}{dy^2} - j\omega \mu \sigma B_x = 0$
$\frac{d^2 J_z}{dy^2} = -\sigma \frac{d}{dt} \frac{dB_x}{dy}$	$\frac{d^2 J_z}{dy^2} = \mu \sigma \frac{dJ_z}{dt}$	$J_z = J_m e^{j\omega t}$	$\frac{d^2 J_z}{dy^2} - j\omega \mu \sigma J_z = 0$

Obe dobijene jednačine su istog oblika u kome funkcija Y predstavlja gustinu struje ili magnetno polje i gde je γ konstanta prostiranja. U opštem slučaju (Sveska V) je

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu (\epsilon - j\sigma / \omega).$$

Za dobre provodnike je $\sigma / (\omega \epsilon) \gg 1$, pa se dobija, kao što je i ovde dobijeno,

$$\gamma^2 = j\omega\mu\sigma.$$

Realni deo je konstanta slabljenja, a imaginarni deo je fazna konstanta (lekcija 108) i obe su jednake.

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \gamma^2 Y = 0$$

$$\gamma = \sqrt{j} \sqrt{\omega\mu\sigma}$$

$$\gamma = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu\sigma}$$

$$\gamma = (1+j)k$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

Rešenja gornjih diferencijalnih jednačina su takođe istog oblika. Na graničnoj površini $y=0$ obe funkcije kompleksne efektivne vrednosti $J_z(0) = J_0$, odnosno $B_x(0) = B_0$, što u zajedničkoj notaciji odgovara Y_0 .

Pošto ni gustina struje ni polje ne mogu neograničeno da rastu kad $y \rightarrow \infty$, sledi da je $C_1 = 0$ i $C_2 = Y_0$.

$$Y = C_1 e^{\gamma y} + C_2 e^{-\gamma y} \quad Y = \begin{Bmatrix} J_z \\ B_x \end{Bmatrix}$$

$$Y = Y_0 e^{-(1+j)ky}$$

Jasno, isti funkcionalni oblik imaju i električno i magnetizaciono polje.

$$J_z = J_0 e^{-(1+j)ky} \quad \triangleright \quad \frac{dJ_z}{dy} = -(1+j)kJ_z$$

$$\frac{dJ_z}{dy} = -\sigma \frac{dB_x}{dt} \quad \triangleright \quad \frac{dJ_z}{dy} = -j\omega\sigma B_x$$

$$J_z = \sqrt{\frac{\omega\sigma}{\mu}} e^{j\pi/4} B_x$$

$$B_z = B_0 e^{-(1+j)ky} \quad \triangleright \quad J_z = H_0 \sqrt{\omega\mu\sigma} e^{-ky} e^{j(\pi/4 - ky)}$$

- Faza vektora gustine struje (i magnetnog i električnog polja) menja se sa rastojanjem od granične površine. Na rastojanju $y = \pi/k$ gustina struje je u svakom trenutku suprotnog smera od onoga koji ima na površini.

$$y = 0$$

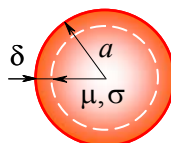
$$J_z = +H_0 k (1+j)$$

$$y = \pi/k$$

$$J_z = -H_0 k e^{-\pi} (1+j)$$

- Amplituda vektora gustine struje (i magnetnog i električnog polja) sa rastojanjem od granične površine opada po eksponencijalnom zakonu. Na dubini $y = \delta = 1/k$ amplituda ima e puta manju vrednost nego na površini (Sveska V). Ta dubina je nazvana dubina prodiranja struje i polja u provodnik. (Eng. *skin depth*). Dobijeni rezultat važi kad god je struja tangenta na površinu provodnika.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{k}$$



- Struja je koncentrisana u veoma tankom sloju uz površinu provodnika. Površinska gustina struje se dobija integracijom zapremnske gustine po koordinati y . Za proizvoljnu dubinu y se dobija

$$J_{S_y} = \int_0^y J_z dy = H_0 (1+j)k \int_0^y e^{-(1+j)ky} dy = H_0 (1 - e^{-(1+j)ky}).$$

Pošto je provodnik poluprstor $0 \leq y < \infty$, ukupna površinska gustina struje se dobija za $y \rightarrow \infty$ i jednaka je jačini magnetizacionog polja uz površinu provodnika, što je jasno realna veličina. Odnos površinskih gustina struje za proizvoljnu i ukupnu (beskonačnu) debljinu pokazuje koji deo energije je koncentrisan uz površinu provodnika.

$$J_S = \int_0^{\infty} J_z dy$$

$$J_S = H_0$$

$$|J_{S_y} / J_S| = 1 - e^{-ky}$$

Sloj debljine δ , tj. $y = \delta = 1/k$, sadrži oko 63%, a sloj debljine 3δ oko 95% ukupne energije. Zato, šuplji (cevasti) provodnici mogu biti opterećeni istom gustinom struje kao i puni. Podužna otpornost cevi poluprečnika a i debljine $\delta \ll a$ se dobija iz definicione formule i iznosi

$$R' = \frac{R}{l} = \frac{1}{\sigma S} = \frac{1}{2\pi a \sigma \delta} \quad \triangleright \quad \boxed{R' = \frac{k}{2\pi a \sigma}} \quad \begin{array}{l} \text{visoka} \\ \text{učestanost} \\ \text{niska} \end{array} \quad \boxed{R' = \frac{1}{2\pi a \sigma \delta}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad \triangleright \quad R' = \frac{1}{2\pi a \sigma \delta} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} = \frac{R_S}{2\pi a} \quad \triangleright \quad \boxed{R_S = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}}$$

Veličina R_S je dimenziono otpornost, $[R_S] = \Omega$, i nazvana je površinska otpornost provodnika. Pravilniji naziv bi bio efektivna otpornost ili dinamička otpornost, jer se ne radi o otpornosti po jedinici površine.

- Za razmatrani poluprstor, iz *Joule*vog zakona (Sveska II) se dobija srednja snaga gubitaka po jedinici površine provodnika. Kako je $dP = JE dV$, to sledi da je

$$\frac{dP}{dS} = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\infty} |J_z|^2 dy = H_0^2 \omega \mu \int_0^{\infty} e^{-2ky} dy = H_0^2 \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \quad \triangleright \quad \frac{dP}{dS} = H_0^2 R_S$$

U izrazu se pojavljuje površinska otpornost, a taj pojam je već uveden prethodnim elementarnim razmatranjem. Odavde se dobijaju opšti izrazi za ukupnu snagu *Joule*ovih gubitaka i ukupnu otpornost:

$$P = \int_S H_0^2 R_S dS, \quad R = \frac{1}{I_0^2} P = \frac{1}{I_0^2} \int_S H_0^2 R_S dS.$$

• Neka kroz puni provodnik kružnog poprečnog preseka poluprečnika a protiče struja jačine I_0 . Magnetizaciono polje uz površinu provodnika se dobija iz *ALBS* zakona (lekcija 43) i iznosi $H_0 = I_0 / (2\pi a)$. Podužna otpornost se dobija iz opšteg izraza za ukupne *Jouleove* gubitke,

$$R' = \frac{R}{l} = \frac{P}{I_0^2 l} = \frac{1}{I_0^2 l} \int_S H_0^2 R_S dS = \frac{1}{I_0^2 l} \frac{I_0^2}{(2\pi a)^2} R_S 2\pi a l \quad \triangleright \quad \boxed{R' = \frac{R_S}{2\pi a}}$$

Dobijeni rezultat je potpuno isti kao rezultat za cevasti provodnik koji je pak dobijen elementarnim razmatranjem.

• Snaga je kompleksna veličina čiji realni deo predstavlja snagu gubitaka, a imaginarni deo reaktivnu snagu. Međutim, način na koji je ovde izložen proračun snage ne dozvoljava analizu imaginarnog dela. Za takvu analizu potreban je pristup pomoću *Poyntingove* teoreme o kojoj još nije bilo reči. Međutim, može i ovako: Odnos električnog i magnetizacionog polja je dimenziono otpornost i definiše karakterističnu impedansu (Sveska V),

$$Z_c = \frac{E}{H} = \frac{J}{\sigma H} = \frac{H_0 \sqrt{\omega \mu \sigma} e^{-ky} e^{j(\pi/4 - ky)}}{\sigma H_0 e^{-ky} e^{jky}} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} e^{j\pi/4} = R_S (1 + j) = R + jX.$$

Sledi da je (unutrašnja) reaktansa induktivnog karaktera, $R = X = R_S$. Podužna unutrašnja induktivnost provodnika u dinamičkom režimu nije ista kao ona koja se računa pri kvazistatičkoj aproksimaciji (lekcija 97).

$$L'_i = \frac{R'}{\omega} = \frac{R_S}{\omega 2\pi a} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\mu}{2\omega \sigma}} \quad \triangleright \quad \boxed{L'_i = \frac{\mu}{8\pi a k}} \quad \begin{array}{l} \text{visoka} \\ \text{učestanost} \\ \text{niska} \end{array} \quad \boxed{L'_i = \frac{\mu}{8\pi}}$$

Površinski efekat povećava aktivnu otpornost i smanjuje unutrašnju induktivnost provodnika, jer je $R' \sim \omega$ i $L' \sim 1/\omega$.

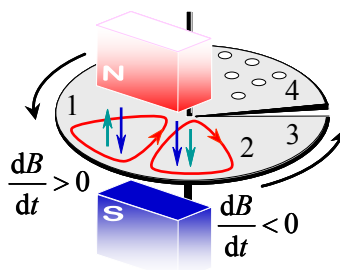
• Primenom formule za dubinu prodiranja dobijena je kratka tabela koja objašnjava već poznate činjenice. Gvožđe ima veoma malu dubinu prodiranja. Jezgra električnih uređaja se prave od međusobno izolovanih gvoždenih limova da bi se koristio puni presek, a ne samo površinski sloj. Gvožđe ne može da zameni skuplji bakar u energetskim kablovima, koji se izrađuju od čeličnih užadi sa aluminijumskom ili bakarnom košuljicom. Na visokim učestanostima vodovi se premazuju mikronskim slojem zlata. Srebro, koje je najbolji provodnik, brzo oksidiše.

$\delta [\mu\text{m}]$	magnetik	μ_r	$\sigma 10^6 [\text{S/m}]$	50 Hz	1 kHz	1 MHz
Ag	dia	0.99998	63	8964	2004	63
Cu	dia	0.999991	59	9220	2061	65
Fe	fero	1000	10	708	158	5
Al	para	1.00002	35	11597	2593	82

106. Efekat vrtložnih struja

Vrtložne struje (Eng. *eddy* - vrtlog) ili *Foucaultove* struje su indukovane konturne struje u provodniku koji se nalazi u magnetnom polju koje je ili promenljivo ili postoji relativno kretanje između polja i provodnika. Kao što je površinski efekat posledica samoindukcije, tako su vrtložne struje posledica indukcije.

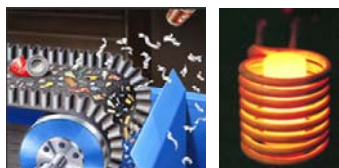
Ovu pojavu je 1824. godine primetio *Arago* i nazvao je obrtni mehanizam. Objašnjenje je 1931. godine dao *Faraday* (lekcija 77), a smer struja je određen 1834. godine *Lenzovim* zakonom. Tek 1855. godine *Foucault* je zabeležio da se *Aragoov* bakarni disk zagreva i da je potrebna veća sila za njegovo okretanje kada se nalazi između polova magneta.



Za deo površine diska koji ulazi u prostor između polova (sektor 1), magnetno polje raste. U tom delu diska se indukuje konturna struja čije magnetno polje se protivi promeni. Za deo površine koji izlazi iz prostora između polova (sektor 2), magnetno polje opada. Indukovane struje u tom delu će proizvesti magnetno polje koje se ponovo protivi promeni, a to znači polje koje pojačava opadajuće primarno polje. Na ivici gde su magnetna polja suprotnih smerova javlja se odbojna sila između magneta i diska. Na drugoj ivici, gde su polja istog smera, javlja se privlačna sila. Obe sile usporavaju rotaciono kretanje i to je pojava koju je otkrio *Foucault* (lekcija 80). Kinetička energija koja se troši na savladavanje sila kočenja se kroz *Jouleove* gubitke transformiše u toplotnu energiju. Kad bi disk bio radijalno ispresecan (sektor 3) ili perforiran (sektor 4), formiranje vrtložnih struja bi bilo svedeno na najmanju moguću meru. Indukovano električno polje bi u neprekinutim delovima diska, slično *Hallovom* efektu (lekcija 12), dovelo do gomilanja elektrona. Nagomilani elektroni bi stvorili elektrostatičko polje suprotnog smera koje bi zaustavilo proces daljeg nagomilavanja (lekcije 12 i 77).

U pojavi vrtložnih struja nema ničeg spektakularnog, a efekti ovih struja su pojava elektromagnetne sile i *Jouleov* efekat.

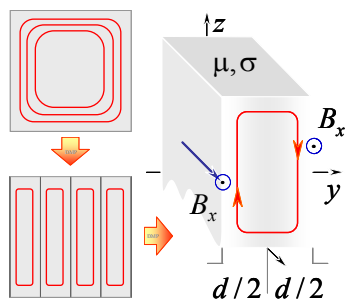
Elektromagnetna sila može da se koristi za elektromagnetne kočnice, ostvarivanje levitacije ili odvajanje neferomagnetnog materijala iz otpada (Eng. *Eddy Current Separator*). Toplota može da se koristi za indukciono zagrevanje (kuvanje).



<http://www.kwsupply.com/>

<http://www.brighthubengineering.com/>

Vrtložne struje su često neželjena pojava. Feromagnetna jezgra uređaja se izrađuju od tankih limova koji su međusobno izolovani i postavljaju se paralelno sa vektorom magnetnog polja. Time se istovremeno umanjuju uticaji površinskog efekta i efekta vrtložnih struja. Za protok fluksa se koristi ceo poprečni presek jezgra i ne dolazi do pregrevanja.



Provodnik oblika neograničene ploče debljine d se nalazi u promenljivom magnetnom polju čiji se smer poklapa sa pozitivnim smerom x ose. Pravac indukovanih struja je tada paralelan z osi.

Raspodela magnetnog polja je određena istom jednačinom kao u $\Rightarrow \frac{d^2 B_x}{dy^2} - \gamma^2 B_x = 0$ prethodnom problemu (lekcija 105).

Rešenje je pogodno napisati u $\Rightarrow B_x = C_1 \cosh \gamma y + C_2 \sinh \gamma y$ obliku hiperboličkih funkcija.

Konstante se određuju iz uslova $\Rightarrow C_2 = 0, C_1 = B_0 \cosh(\gamma d/2)$ simetrije, $B_x(-d/2) = B_x(d/2)$.

U konačnom rešenju B_0 je efektivna vrednost polja na graničnim površinama, $y = \pm d/2$ $\Rightarrow B_x = B_0 \frac{\cosh \gamma y}{\cosh(\gamma d/2)}$

Gustina indukovane struje je $J_z = -\frac{1}{\mu} \frac{dB_x}{dy} \Rightarrow J_z = -B_0 \frac{\gamma}{\mu} \frac{\sinh \gamma y}{\cosh(\gamma d/2)}$

Kako je $|\gamma d| \ll 1$, tj. $kd \ll 1$ to je i $\Rightarrow J_z = -B_0 \frac{\gamma^2}{\mu} y = -j\omega\sigma B_0 y$ $\sinh \gamma y \approx \gamma y$ i $\cosh \gamma y \approx 1$.

Snaga Jouleovih gubitaka po jedinici površine ploče je $\Rightarrow \frac{dP}{dS} = \frac{1}{\sigma} \int_{-d/2}^{d/2} |J_z|^2 dy = \frac{1}{12} B_0^2 \omega^2 \sigma d^3$

Do istog rezultata može da se dođe i direktnom primenom zakona elektromagnetne indukcije (lekcija 76), pri čemu treba voditi računa da magnetno polje zavisi od koordinate y , a da je $B_m = \sqrt{2} B_0$.

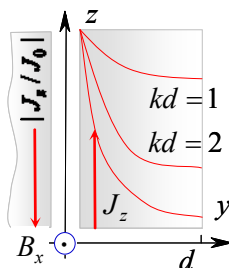
$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} \triangleright 2Eh = -2yh \frac{d}{dt} (B_m \cos \omega t) \triangleright E = y\omega B_m \sin \omega t$$

$$\frac{dP}{dV} = \sigma E^2 \triangleright \frac{dP}{dS} = \frac{\sigma}{T} \int_0^T \int_{-d/2}^{d/2} E^2 dy dt = \frac{1}{24} B_m^2 \omega^2 \sigma d^3 = \frac{1}{12} B_0^2 \omega^2 \sigma d^3$$

107. Efekat blizine

Efekat blizine (Eng. *proximity* - blizina) je uticaj promenljive struje u jednom provodniku na raspodelu struje u drugom bliskom provodniku. Ovaj efekat se objašnjava elektromagnetnom indukcijom i nije ga moguće odvojiti od površinskog efekta, te se često naziva i kombinovani efekat. Analiza efekta blizine je uvek vrlo složen zadatak, a raspodelu gustine struje (i polja) nije moguće dobiti analitičkim metodama čak i u najjednostavnijim slučajevima. Stoga je analiza koja sledi samo ilustrativnog karaktera.

Neka su date dve veoma bliske neograničene ploče istih debljina d , kroz koje u pravcu z ose, a u suprotnim smerovima, protiču struje istih jačina. Magnetno polje ima samo x komponentu. Kao i u prethodnim analizama (lekcije 105 i 106) gustina struje i polja su funkcije samo y koordinate, a odgovarajuće raspodele su date rešenjem već poznate diferencijalne jednačine.



$$J_z = C_1 e^{\gamma y} + C_2 e^{-\gamma y}, \quad B_x = \frac{j\gamma}{\omega\sigma} (C_1 e^{\gamma y} + C_2 e^{-\gamma y}).$$

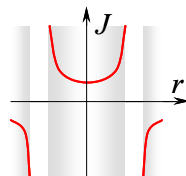
U tačkama koje pripadaju ravni $y = d$ magnetno polje je jednako nuli, što je rezultat delovanja dve vrlo bliske struje suprotnih smerova, $B_x(d) = 0$.

Kad se iz ovog uslova odredi veza između konstanti integracije, i kad se kao i ranije uzme da je $J_z(0) = J_0$, dobija se konačno

$$J_z = J_0 \frac{\cosh(\gamma(y-d))}{\cosh \gamma d}$$

Gustine struja su najveće na površinama koje su bliske jedna drugoj, a najmanje na udaljenim površinama. Za struje istih smerova efekat bi bio obrnut. Da nema efekta blizine, gustine struje bi na svim površinama bile najveće i jednake, a najmanje na simetralnim ravnima ploča.

• Isti zaključci važe za realan koaksijalni vod. Da nema efekta blizine struja bi tekla u tankom površinskom sloju na spoljašnjoj površini spoljašnjeg provodnika. Ovako, najveća gustina struje je na unutrašnjoj površini spoljašnjeg provodnika.



Ranije izvedene formule ostaju u važnosti sa dodatkom za uticaj spoljašnjeg provodnika.

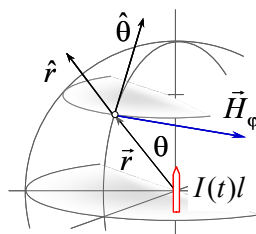
$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}, \quad R' = \frac{R_s}{2\pi a} + \frac{R_s}{2\pi b}, \quad L'_i = \frac{R'}{\omega}.$$

108. Uslovi kvazistatičnosti magnetnog polja

Kod velikog broja problema praktične i teorijske elektrotehnike moguće je smatrati da su elektromagnetne promene trenutne, čime se znatno pojednostavljaju analiza i rešavanje problema. Ako elektromagnetna promena stigne do svih tačaka u posmatranoj oblasti pre nego što se struja ili količine naelektrisanja značajnije promene, problem je kvazistatičan. Kod prostoperiodičnih polja uslov kvazistatičnosti je ispunjen ako su dimenzije oblasti od interesa znatno manje od talasne dužine. Na primer, za idustrijske učestanosti, $f = 50 \text{ Hz}$, talasna dužina je $\lambda \approx 6000 \text{ km}$, pa se svi problemi rešavaju kao kvazistatički.

Jačina magnetnog polja koja potiče od strujnog elementa opticanog stacionarnom električnom strujom se izračunava na osnovu dobro poznatog *ALBS* zakona (lekcija 43). Za strujni element čija dužina je zanemarljivo mala, $l \rightarrow 0$, elementarnu dužinu, dl , je moguće zameniti stvarnom dužinom, l . U sfernom koordinatnom sistemu sa početkom u centru strujnog elementa magnetno polje ima samo ugaonu komponentu. U opštem slučaju jačina struje je promenljiva u vremenu i na velikim rastojanjima izraz za polje mora da bude korigovan da bi konačna brzina prenošenja elektromagnetne promene bila uključena u proračun. Elektromagnetna promena se prenosi konačnom brzinom v i na rastojanju r od izvora se detektuje tek posle vremenskog intervala $\Delta t = r/v$.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \sin \theta dl$$



$$H_\phi = \frac{1}{4\pi r^2} I l \sin \theta$$

$$H_\phi = \frac{1}{4\pi r^2} I(t) l \sin \theta$$

$$H_\phi = \frac{1}{4\pi r^2} i(t - \frac{r}{v}) l \sin \theta$$

Međutim, naelektrisanja duž strujnog elementa ubrzavaju i usporavaju svoje kretanje što znači da magnetno polje mora da ima još jednu komponentu koja je srazmerna prvom izvodu struje i koja isčezava na malim rastojanjima. Ta komponenta može da se rekonstruiše iz definicije prvog izvoda.

$$\frac{di(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{i(t) - i(t - \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{r/v \rightarrow 0} \frac{i(t) - i(t - r/v)}{r/v}$$

Grafična vrednost može da se izostavi jer je veličina r/v veoma mala čak i za velika rastojanja. Na primer, u vakuumu (i vrlo približno u vazduhu) je $v = c$ i za rastojanje $r = 3 \text{ cm}$ kašnjenje iznosi svega $r/c = 0.1 \text{ ns}$.

$$\frac{di(t)}{dt} \approx \frac{i(t) - i(t - r/v)}{r/v} \quad \triangleright \quad i(t) \approx i(t - r/v) + \frac{r}{v} \frac{d}{dt} i(t - r/v)$$

Neka su promene struje prostoperiodične, tada je

$$i(t - r/v) = I_0 \cos \omega(t - r/v) = I_0 \cos(\omega t - kr),$$

$$\frac{d}{dt} i(t - r/v) = -\omega I_0 \sin(\omega t - kr)$$

gde je $k = \omega/v = 2\pi f/(\lambda f) = 2\pi/\lambda$ fazna konstanta ili talasni broj.

Kad se dobijeni izrazi za jačinu struje zamene u *ALBS* zakon sledi izraz koji je identičan onom koji se dobija pri proučavanju *Hertzovog* dipola kao osnovnog zračećeg elementa (Sveska V).

$$H_\varphi = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} i(t - r/v) + \frac{1}{rv} \frac{d}{dt} i(t - r/v) \right) l \sin \theta$$

$$H_\varphi = \frac{I_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} \cos(\omega t - kr) - \frac{k}{r} \sin(\omega t - kr) \right) l \sin \theta$$

Indukciona komponenta

dominantna na malim rastojanjima
Magnetno polje naelektrisanja
u stalnom kretanju

Zračeća komponenta

dominantna na velikim rastojanjima
Magnetno polje naelektrisanja
u ubrzanom kretanju

Iz prvog oblika izraza za magnetno polje je očigledno da kad su promene jačine struje u vremenu spore, prvi izvod teži nuli i drugi sabirak je moguće zanemariti. Takođe, na malim rastojanjima je moguće zanemariti kašnjenje koje potiče zbog konačne brzine prenošenja elektromagnetne promene.

Drugi oblik izraza za magnetno polje, koji važi za harmonijske promene, pruža kvantitativne podatke. Amplitude obe komponente polja su jednake kad je $1/r^2 = k/r$, odnosno kad je $kr=1$ ili za $r \approx \lambda/6$. Problemi se mogu tretirati kao kvazistatički ako je $r \ll \lambda/6$, odnosno ako je $kr \ll 1$.

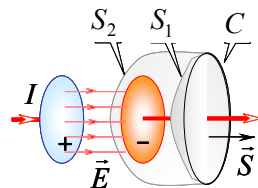
Dakle, primenljivost kvazistatičke aproksimacije (lekcije 86 ili 88) zavisi od učestanosti, veličine sistema i elektromagnetnih osobina sredine, jer je $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. Na primer, pri učestanosti $f = 1\text{ GHz}$, u vazduhu gde je brzina prenošenja promene $v = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, polje je kvazistatičko za rastojanja $r \ll 0.05 \text{ m}$.

109. Prva Maxwellova jednačina

U ranijem izlaganju (lekcija 19) je naznačeno da postoji neusaglašenost između osnovnih zakona elektrodinamike. Da bi se ovo uočilo, potrebno da se potraži divergencija levih strana *Faradyevog* i *Ampèreovog* zakona. Divergencija rotora vektora je uvek jednaka nuli. Kad se to pravilo primeni na zakon indukcije sve je tačno, jer se dobija da je divergencija vektora magnetnog polja jednaka nuli, što je zapravo zakon o konzervaciji magnetnog fluksa. Međutim, isti postupak primenjen na *Ampèreov* zakon daje da je divergencija vektora gustine struje jednaka nuli, što je tačno samo za stalne struje. Van okvira magnetostatike *Ampèreov* zakon ne važi.

lekcija 85 ⚡ <i>Faradyev</i> zakon	lekcija 17 Konzervacija fluksa ⚡
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \text{div}(\text{rot } \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{B} \rightarrow 0 = \text{div} \vec{B} \quad \checkmark \quad \text{div} \vec{B} = 0$	
$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \rightarrow \text{div}(\text{rot } \vec{B}) = \mu_0 \text{div} \vec{J} \rightarrow 0 = \text{div} \vec{J} \quad ? \quad \text{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	
⬆ <i>Ampèreov</i> zakon lekcija 19	Jednačina kontinuiteta Sveska II ⬆

Postoji još jedan način da se uvidi da *Ampèreov* zakon nije moguće primeniti na probleme sa promenljivim strujama. Na primer, punjenje ili pražnjenje kondenzatora (lekcija 101) nisu magnetostatički procesi, jer tom prilikom dolazi do nagomilavanja naelektrisanja na elektrodama.



Za primenu *Ampèreovog* zakona u integralnom obliku potrebna je zamišljena kontura C koja obuhvta provodnik do jedne od elektroda.

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} d\vec{S}$$

Najjednostavnija površina S je ona koja leži u ravni konture. Tada provodnik probija površinu pod pravim uglom, jedinični vektor površine i vektor gustine struje su kolinearni. Vrednost površinskog integrala je jednaka jačini struje kroz provodnik i ako je kontura kružna sve se svodi na *Biot-Savartov* zakon (lekcija 21). Međutim, na istu zamišljenu konturu, koja čak ne mora da bude kružna, oslanja se bezbroj površina, a vrednost integrala na desnoj strani zavisi od izbora površine.

Za površinu S_1 rezultat je isti kao i za površinu S . Međutim, za površinu S_2 , koja prolazi kroz međuelektrodni prostor, fluks vektora gustine struje je jednak nuli. U kondenzatoru je $J = 0$.

$$\int_S \vec{J} d\vec{S} = \begin{cases} I, & S \equiv S_1 \\ 0, & S \equiv S_2 \end{cases}$$

Matematički gledano, problem je što divergencija rotora mora da bude jednaka nuli, a nije. *Maxwell* je ovaj problem rešio 1861. godine, dodajući još jedan član na desnu stranu *Ampèreovog* zakona, čineći je tako bezizvornom u svim slučajevima. *Maxwell* je dodatni član nazvao struja pomeraja (Eng. *Displacement current*). Dimenziono to jeste gustina struje, mada se u vakuumu ne može objasniti kretanjem nosilaca naelektrisanja. Ova genijalna korekcija (ako se uopšte može nazvati korekcijom) posebno je obrađena u drugim tekstovima. Ovde je dato samo matematički kratko izvođenje, na način za koji ja mislim da je razumljiv.

Struja pomeraja $\xrightarrow{\hspace{10em}}$

$$0 = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) = \mu_0 \operatorname{div}(\vec{J} + \vec{J}_D) \quad \triangleright \quad \operatorname{div} \vec{J}_D = -\operatorname{div} \vec{J} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{div} \vec{J}_D = -\left(-\frac{d\rho}{dt}\right) = \frac{d}{dt} \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \frac{d\vec{D}}{dt} \quad \triangleright \quad \vec{J}_D = \frac{d\vec{D}}{dt}$$

Jednačina kontinuiteta (Sveska II) $\xleftarrow{\hspace{10em}}$ *Maxwellov* postulat (Sveska I)

U opštem slučaju je $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ i struja pomeraja ima dve komponente: struja pomeraja u vakuumu i struja polarizacije (detaljnije, Sveska IV, ako je ikada budem napisao). Dakle, kad se struja pomeraja doda na desnu stranu *Ampèreovog* zakona dobija se prva *Maxwellova* jednačina.

U vakuumu	prva <i>Maxwellova</i> jednačina	U materiji
$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$		$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Kad promene u vremenu ne postoje (ili su veoma spore) izvodi po vremenu su jednaki nuli (ili vrlo bliski nuli), prva *Maxwellova* jednačina se svodi na stacionarni slučaj tj. na *Ampèreov* zakon.

Tako je rešen paradoks punjenja kondenzatora. Električno polje u kondenzatoru i struja između elektroda su

$$E = \frac{\eta}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}, \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 S} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{I}{\varepsilon_0 S}$$

Kad se prva *Maxwellova* jednačina u integralnom obliku primeni na bilo koju površinu dobija se uvek isti rezultat.

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} \quad \left[\begin{array}{l} S \equiv S_1 \\ E = 0 \end{array} \rightarrow \oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} S \equiv S_2 \\ I = 0 \end{array} \rightarrow \oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} = \mu_0 I \right.$$

110. Sistem *Maxwellovih* jednačina

Oko redosleda *Maxwellovih* jednačina ne postoji jedinstven stav. Ovde su jednačine date redosledom koji je već pomenut (Sveska V), a koji su koristili profesori kod kojih sam ja sticao znanja [18, 22, 25]

<i>Maxwell</i>	U vakuumu	U materiji
Prva	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_s + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
Druga	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Treća	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{div } \vec{D} = \rho_s$
Četvrta	$\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$

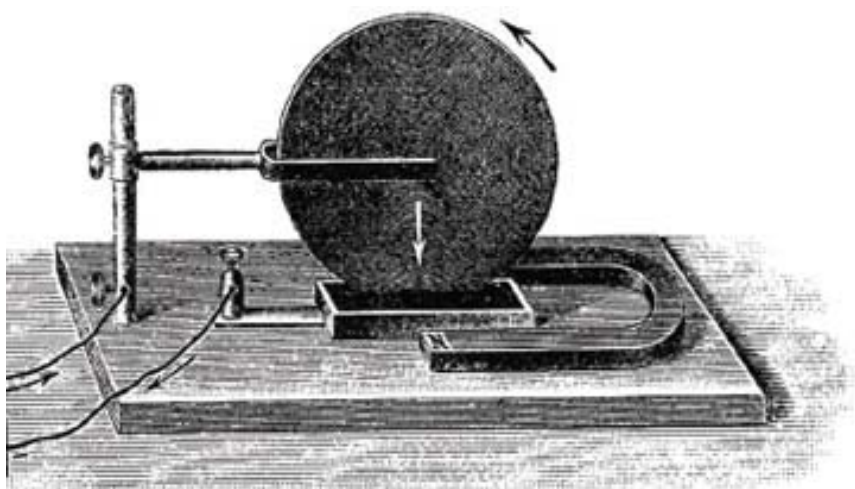
Ovde je prvi put uz struje i naelektrisanja dodat indeks da bi se naznačila razlika između slobodnih i ukupnih struja i naelektrisanja. U dosadašnjim izlaganjima nije moglo da dođe do zabune. Dakle, ako se indeks izostavi, jer se podrazumeva da se radi o slobodnim naelektrisanjima u mirovanju i kretanju, sledi zapis koji se najčešće sreće u literaturi.

<i>Maxwell</i>	Operatorski oblik	Integralni oblik
Jednačine cirkulacije	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$
	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$
Jednačine divergencije	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \rho$
	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$

Za potpuno opisivanje elektromagnetnih polja, sistemu *Maxwellovih* jednačina treba dodati konstitutivne veze i *Ohmov* zakon. Jednačina kontinuiteta je već sadržana u prvoj jednačini. Kao što *Maxwellove* jednačine pokazuju da naelektrisanja stvaraju polje, tako elektomagnetna sila pokazuje kako polje deluje na naelektrisanje.

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu} \vec{B} \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E} \\ \vec{F} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

PRILOZI





Mirjana Radić, 2016

A. Zbunjujući nazivi za magnetno polje

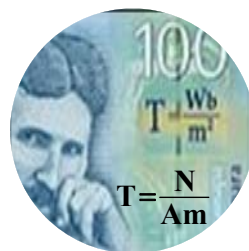
$\vec{B}$	Magnetno polje	Magnetic field
	Gustina magnetnog fluksa	Magnetic flux density
	Magnetna indukcija	Magnetic induction
	(ne koristi se)	Field B
$\vec{H}$	Magnetizaciono polje	Magnetizing field
	Jačina magnetnog polja	Magnetic field strength
		Magnetic field intensity
	Magnetno polje	Magnetic field
	(ne koristi se)	Auxiliary field
		Field H

Ja isključivo koristim termine magnetno i magnetizaciono polje.

Sve loše je uvek stizalo s druge strane okeana (dobro, kukuruz može da se izuzme), pa smo tako za magnetno polje B dobili besmislen naziv magnetna indukcija. Ovaj pojam, mada je već davno odomaćen, pa sam ga i sam ranije upotrebljavao, u elektrodinamici ima sasvim drugo značenje i treba ga izbegavati [5, p.271].

Zaboravili smo *Тривундан*, a prihvatili smo *Valentine's day*. Sada prihvatamo apsurdan naziv za magnetno polje - gustina magnetnog fluksa [3]. Zaboravili smo da je pojam magnetnog polja, uostalom kao i pojam električnog polja, uveden pomoću sile (lekcija 1).

U zvaničnom opisu novčanice od sto srpskih dinara piše da je prikazana *formula za jedinicu magnetne indukcije*, a formula prikazuje gustinu magnetnog fluksa. Dakle potpuno zbunjujuće. Da je bar to ona formula iz prve lekcije, ali nije. Tako je to, oni koji prave pare ne čitaju knjige.



B. Kratka istorija magnetizma

U ovu kratku istoriju magnetizma nisu uključena otkrića vezana za strogo električne pojave i elektromagnetne talase, te njihovo nastajanje i prostiranje.

- 4000.	<i>Tšu-ši</i> , kamen ljubavi	Kineski zapisi
-2637.	Prva upotreba kompasa	<i>Huang-ti</i> , kineski car
-1110.	Prva plovidba pomoću kompasa	<i>Taheon-Koung</i> , kineski ministar
-1000.	Prvi opis prirodnog magneta, <i>Lodestone</i>	Ομηρος , tj. <i>Homer</i> , starogrčki pesnik
- 950.	Redovna upotreba kompasa	<i>Solomon</i> , izraelski kralj
-900.	Otkriće grčkog ovčara u oblasti Magnesia u Maloj Aziji, prema zapisima	<i>Gaius Plinius Secundus</i> (23-79) <i>Giambattista Della Porta</i> (1538-1615), italijanski prirodnjak i filozof
-600.	Prvi zapis o svojstvima prirodnog magneta	Θαλῆς ὁ Μιλήσιος (pne 624-546), Tales iz Mileta, starogrčki filozof
121.	Prvi zapis pojma magnet	Kineski rečnik <i>Choue Wen</i>
1186.	Prvi zapisi o kompasu u zapadnoj civilizaciji	<i>Alexander Neckem</i> (1157-1217), engleski monah
1269.	Prvi koncept polova i detaljan opis kompasa	<i>Petrus Peregrinus de Marincourt</i> , francuski krstaš: <i>Epistola de Magnete</i>
1600.	Prvo racionalno objašnjenje rada kompasa	<i>William Gilbert</i> (1544-1603), engleski dvorski fizičar
1730.	Prvi složeni magnet	<i>Servigton Savery</i>
1740.	Prvi komercijalni magnet	<i>Gowen Knight</i> (1713–1772)
1742.	Sila između polova obrnuto srazmerna trećem stepenu rastojanja	<i>Thomas Le Seur</i> (1703–1770) <i>Francis Jacquier</i> (1711–1788)
1750.	Prva knjiga o proizvodnji magneta. Sila između polova obrnuto srazmerna kvadratu rastojanja	<i>John Mitchell</i> (1724–1793)
1778.	Otkriće diamagnetizma (bizmut i antimon)	<i>Sebald Justinus Brugmans</i> (1763-1819)
1819.	Otkriće elektromagnetizma	<i>Ørsted</i>
1820.	Magnetna indukcija strujnog elementa	<i>Biot i Savart</i>
1825.	<i>Ampère</i> ov zakon	<i>Ampère</i>
1824.	Rotirajući bakarni disk	<i>Arago</i>
1824.	Magnetni skalar potencijal	<i>Poisson</i>
1825.	Prvi elektomagnet	<i>William Sturgeon</i> (1783-1850)
1830.	Induktivnost	<i>Henry</i>
1831.	Elektromagnetna indukcija	<i>Faraday</i>
1832.	Nezavisno otkriće indukcije	<i>Henry</i>

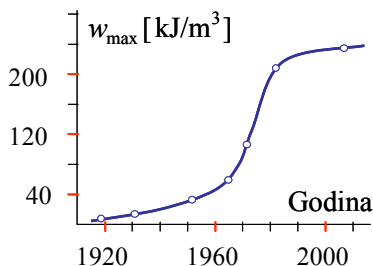
1832.	Prvi alternator i komutator	<i>Pixii</i>
1833.	Prvi telegraf	<i>Gauss i Weber</i>
1834.	<i>Lenzov zakon</i>	<i>Lenz</i>
1837.	Prvi komercijalni telegraph	<i>Samuel Morse (1791-1872)</i>
1845.	Magnetni vektor potencijal matematički zapis indukcije	<i>Frantz Ernst Neumann (1798-1895)</i>
1846.	Diamagnetizam	<i>Faraday</i>
1855.	Prva praktična upotreba naizmjenične struje	<i>Guillaume-Benjamin-Amand Duchenne (1806-1875)</i>
1855.	Vrtlože struje	<i>Foucault</i>
1855.	Divergencija, rotor - Fizičko tumačenje magnetnog polja	<i>Maxwell</i>
1860.	Motor jednosmerne struje	<i>Antonio Pacinotti (1841-1912)</i>
1861.	Zvučnik <i>Ampèreov zakon - korekcija</i>	<i>Johann Philipp Reis (1834-1874) Maxwell</i>
1865.	A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field	<i>Maxwell</i>
1871.	Generator jednosmerne struje, dinamo	<i>Zenobe Theophile Gramme (1826-1901)</i>
1872.	Komercijalni generator jednosmerne struje	<i>Kompanija Siemens and Halske</i>
1873.	A Treatise of Electricity and Magnetism	<i>Maxwell</i>
1873.	<i>Rowlandov zakon ili Hopkinsonov zakon</i>	<i>Rowland, i Hopkinson</i>
1875.	Telefon	<i>Alexander Graham Bell (1847-1922)</i>
1878.	Mikrofon	<i>David Edward Hughes (1831-1900)</i>
1879.	Usavršeni generator jednosmerne struje	<i>Thomas Alva Edison (1847-1931)</i>
1879.	<i>Hallovo efekat</i>	<i>Hall</i>
1883.	Obrtno magnetno polje	<i>Tesla</i>
1883.	Površinski efekat	<i>Sir Horace Lamb (1849-1934)</i>
1881.	Prvi patent transformatora	<i>Lucien Gaulard (1850-1888) John Dixon Gibbs (1834-1912)</i>
1886.	Prvi komercijalni transformator	<i>William Stanley (1858-1916)</i>
1885.	Široka proizvodnja naizmjenične struje	<i>George Westinghouse (1846-1914)</i>
1887.	Diferencijalni operatori u <i>Maxwellovim jednačinama</i>	<i>Heaviside</i>
1888.	Prva proizvodnja elektromagnetnih talasa	<i>Hertz</i>
1889.	Pupinov kalem	<i>Mihajlo Pupin (1858-1935)</i>
1891.	Teslin kalem	<i>Tesla</i>
1895.	<i>Curieova temperatura</i>	<i>Curie</i>
1895.	Komutator i ispravljač	<i>Karol Franciszek Pollak (1859-1928)</i>
1897.	Otkriće elektrona	<i>Thomson</i>

1898.	Prvi magnetni zapis	<i>Valdemar Poulsen (1869-1942)</i>
1902.	Uticaj magnetizma na zračenje *	<i>Lorentz</i>
1905.	Objašnjenje diamagnetizma paramagnetizma i	<i>Paul Langevin (1872-1948)</i>
1906.	Otkriće elektrona, maseni spektrometar *	<i>Thomson</i>
1906.	Objašnjenje feromagnetizma	<i>Ernest Weiss Pierre (1865-1940)</i>
1911.	Superprovodljivost	<i>Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926)</i>
1917.	Prvi kobaltni magnet	<i>K. Honda i T. Takai</i>
1920.	Prvi magnetron	<i>Albert W. Hull (1880-1966)</i>
1923.	μ -metal	<i>Willoughby S. Smith, Henry J. Garnet</i>
1928.	Prva magnetna traka	<i>Fritz Pfeleumer (1881-1945)</i>
1930.	Prvi Alnico Magnet (Fe+Al, Ni, Co)	<i>Mishima Tokushichi (1893-1975)</i>
1931.	Prvi ciklotron (postao operativan 1943)	<i>Lawrence</i>
1931.	Prva električna gitara	<i>George Delmetia Beauchamp (1899-1941)</i>
1940.	Betatron	<i>Donald William Kerst (1911-1993)</i>
1943.	Magnetni moment protona *	<i>Stern</i>
1944.	Magnetna svojstva atomskog jezgra *	<i>Isidor Isaac Rabi (1898-1988)</i>
1947.	Memorije sa magnetnim jezgrom	<i>John Adam Presper Eckert (1919-1995)</i>
1952.	Keramički magneti (Fe+Ba i Fe+Sr)	<i>J.J. Went, G.W. Rathenau, E.W. Gorte i G.W. Van Oosterhout</i>
1953.	Prvi magnetni disk	<i>Kompanija IBM</i>
1955.	Magnetni moment elektrona *	<i>Polykarp Kusch (1911-1993)</i>
1966.	Samarijum-kobalt magnet (SmCo5)	<i>Dr Karl J. Strnat</i>
1970.	Antiferromagnetizam i ferrimagnetizam *	<i>Louis Eugène Félix Néel (1904-2000)</i>
1972.	Samarijum-kobalt magnet (Sm2Co17)	<i>Dr Karl J. Strnat Dr Alden Ray</i>
1983.	Neodijum-Gvožđe-Bor magnet (Nd2Fe14B)	<i>Dr Masato Sagawa Dr John Croat</i>
1999.	Ørstedov satelit, snimanje Zemljinog magnetnog polja	<i>Prvi danski satelit</i>
2007.	Džinovska magnetootpornost *	<i>Peter Andreas Grünberg (1939-) Albert Fert (1938-)</i>

*

Nobelova nagrada za otkriće

C. Gustina energije permanentnih magneta



D. Osnovne jednačine kinematike

Osnovne jednačine kretanja su popularno nazvane *suvat* prema oznakama za osnovne veličine pravolinijskog kretanja.

s	<i>space</i> - put
u	<i>initial velocity</i> - početna brzina, v_0
v	<i>velocity</i> - brzina
a	<i>acceleration</i> - ubrzanje
t	<i>time</i> - vreme

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad \frac{da}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^3s}{dt^3} = 0, \quad \begin{matrix} t = 0 \\ s = 0 \\ v = v_0 \end{matrix}$$

$$v = \int a \, dt = at + C$$



$$v = v_0 + at$$

$$s = \int v \, dt = \int (v_0 + at) \, dt = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 + C$$



$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v_s = \frac{s}{t} = v_0 + \frac{1}{2} at = \frac{2v_0 + at}{2} = \frac{v_0 + v}{2}$$



$$s = \frac{(v_0 + v)t}{2}$$

$$s = \frac{(v_0 + v)t}{2} = \frac{(v_0 + v)}{2} \frac{(v - v_0)}{a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$



$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

suvat jednačine ostaju u važnosti ako se linijske veličine zamene ugaonim.

	ugao $\theta \rightarrow s$
početna ugaona brzina	$\omega_0 \rightarrow v_0$
ugaona brzina	$\omega \rightarrow v$
ugaono ubrzanje	$\alpha \rightarrow a$

Između osnovnih veličina pravolinijskog i rotacionog kretanja postoje veze:

$$\begin{aligned} s &= r\theta \\ \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

E. Izračunavanje potpunih eliptičkih integrala

SUBROUTINE dmpeike (ak, ek, ee, ir)

```
! dmplib      - Ellipt.Int.Comp.
! AGM method - August, 1987.
! Rev #1      - April, 1996.
! ek = K(k)   - 1st kind
! ee = E(k)   - 2nd kind
! ak = k      - modulus
! ir = -1     - error
! ir > -1     - # of iterations
```

IMPLICIT REAL*8 (a-h, o-z)

```
IF (ak .GT. 1.d0) THEN
    ier=-1
    RETURN
```

ENDIF

```
IF (ak .EQ. 1.d0) THEN
    ek=HUGE(ek)
    ee=1.d0
    ir=0
    RETURN
```

ENDIF

```
ek=2.d0*DATAN(1.d0) ! pi/2
eps=1.d-15          ! epsilon
```

```
a0=1.d0
b0=dsqrt(1.d0-ak*ak)
c0=ak
s=c0*c0
ir=0
```

```
dif=DABS(a0-b0)
```

```
DO WHILE (dif .GT. eps)
```

```
    a1=(a0+b0)/2.d0
```

```
    b1=DSQRT(a0*b0)
```

```
    c1=(a0-b0)/2.d0
```

```
    ir=ir+1
```

```
    s=s+2**ir*c1*c1
```

```
    a0=a1
```

```
    b0=b1
```

```
    dif=DABS(a1-b1)
```

ENDDO

```
ek=ek/a0
```

```
ee=ek*(1.-s/2.d0)
```

RETURN

END

FORTRAN potprogram

$$0 \leq k < 1$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}}$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$$

Gauss-Legendreov metod
aritmetičko-geometrijske
sredine

$$a_{n+1} = (a_n + b_n)/2, \quad a_0 = 1,$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_0 = \sqrt{1-k^2},$$

$$c_{n+1} = (a_n - b_n)/2, \quad c_0 = k,$$

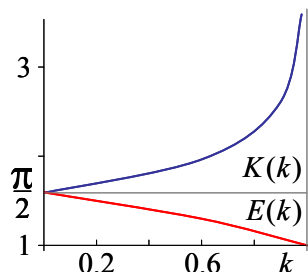
Prekid iterativnog procesa

$$|a_n - b_n| \leq \varepsilon$$

Numeričko rešenje

$$K(k) = \frac{\pi}{2a_n}$$

$$E(k) = K(k) \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n 2^i c_i^2 \right)$$



Indeks imena

Ovoj indeks ne prikazuje sva pojavljivanja nekog imena u tekstu, već su date samo najbitnije odrednice za osnovni tekst bez priloga. To je urađeno iz praktičnih razloga, jer se, primera radi, odrednice *Ampère* ili *Ampèreov* zakon pojavljuju više od 90 puta.

<i>Andre - Marié Ampère</i> , 1775-1836	17, 19, 42, 50, 64, 73, 77, 83, 160
<i>Francois Joan Domènec Arago</i> , 1786-1853	17, 112, 115, 156
<i>Aristotélēs -Αριστοτέλης</i> , 384-322 pne	15
<i>Kenneth Tompkins Bainbridge</i> , 1904 -1996	33
<i>Jean Baptiste-Biot</i> , 1774-1862	21, 42, 64, 160
<i>Kristian Birkeland</i> , 1867-1917	19
<i>Charles-Augustin de Coulomb</i> , 1736-1806	93. 95
<i>Piere Curie</i> , 1856-1906	87
<i>Sir Humphry Davy</i> , 1778-1829	16, 112
<i>René Descartes</i> , 1596-1650	26,68
<i>Paul Dirac</i> , 1902-1984	68
<i>Albert Einstein</i> , 1879-1855	114
<i>Michael Faraday</i> , 1791-1867	16, 17, 101, 111, 113, 120, 122 , 156, 160
<i>Jovan Filopon</i> , 490-570	15
<i>Sir John Ambrose Fleming</i> , 1849-1945	20
<i>Jean Bernard Léon Foucault</i> , 1819-1868	156
<i>Benjamin Franklin</i> , 1706-1790	15, 101, 111
<i>Galileo Galilei</i> , 1564-1642	104
<i>Johann Carl Friedrich Gauss</i> , 1777-1855	17, 63, 77, 82, 92, 93
<i>Joseph Louis Gay-Lussac</i> , 1778-1850	111
<i>Walther Gerlach</i> , 1889-1979	27
<i>William Gilbert</i> , 1544-1603	15, 22, 94, 103
<i>Edwin Herbert Hall</i> , 1855-1938	29, 156
<i>Oliver Heaviside</i> , 1850-1925	28, 124, 148
<i>Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz</i> , 1821-1894	55, 59
<i>Joseph Henry</i> , 1797-1878	114, 124
<i>Heinrich Rudolf Hertz</i> , 1857-1894	159
<i>John Hopkinson</i> , 1849-1891	104, 107
<i>James Prescott Joule</i> , 1818-1889	135, 147, 149, 154, 157
<i>Gustav Robert Kirchhoff</i> , 1824-1887	74, 106, 138
<i>Giuseppe Luigi Lagrange</i> , 1736-1813	31
<i>Pierre-Simon, marquis de Laplace</i> , 1749-1827	20, 64, 96, 100
<i>Ernest Orlando Lawrence</i> , 1901-1958	33

*Heinrich Lenz -**Эмилий Христианович Ленц*, 1804 - 1865**114**, 123, 124, 156*Hedrik Antoon Lorentz*, 1853-1928.**28**, 49, 114*James Clerk Maxwell*, 1831-187919, 34, 49, 76, **122**,
161, **163***Franz Ernst Neumann*, 1798-1895**114**, **125**, 127, 129*Sir Isak Newton*, 1642-1726

48

Alfred Nobel, 1801-1872

28, 33

Hans Christian Ørsted, 1777-1851**16**, 17, 39*Georg Simon Ohm*, 1789-1854105, 106, 135, 138,
143, 163*Ostrogradsky -**Михаил Васильевич Остроградский*, 1801-1862

92

Hippolyte Pixii, 1808-1835

121

Siméon Denis Poisson, 1781-1840

59, 91, 93

Giovanni Battista Della Porta, 1538-1615

15

John Henry Poynting, 1852-1914

155

Michel Rolle, 1652-1719

49

Henry Augustus Rowland, 1848-1901**104***Félix Savart*, 1791-1841**21**, **42**, **64**, 161*Otto Stern*, 1888-1969

27

Sir George Gabriel Stokes, 1819-1903

23, 37, 59

George Johnstone Stoney, 1826-1911

28

Brook Taylor, 1685-1731

55, 66, 127

Nikola Tesla, 1856-1943

19, 59, 143

Sir Joseph John Thomson, 1856-1940

28

Vilhelm Eduard Weber, 1804-1891

34

Literatura

- [1] Abramowitz M, Irene A. S: *Hanbook of Mathematical Tables, with Formulas, Grphs and Mathematical Tables*, Dover publications, Inc. New York, 1970.
ISBN 0-486-61272-4
- [2] Bennrtt. W. S: Basic Sources of Electric and Magnetic Fields Newly Examined, *IEEE Anntenas and Propagation Magazine*, Vol.43, No. 1, 2001, pp.31, 35.
Borwein, J. M; Borwein, P. B: More Quadratically Converging Algorithms for π , *Mathematics of Computation*, Vol.46, No.173, 1986, pp.247,253.
- [3] Bureau International des Poids et Mesures, *The International System of Units (SI)*, 8th edition 2006, Stedi Media, Paris,
ISBN 92-822-2213-6.
- [4] Đurđević, D.Z: *Zbirka zadataka iz elektromagnetike*, FTN Kosovska Mitrovica, 2009.
ISBN 978-86-7412-051-4
- [5] Griffiths D. J: *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, 3rd ed, 1999.
ISBN 0-13-805436-X
- [6] Hayt W. H, Jr, Buck. J. A.: *Engineering Electromagnetics*, Eighth edition, McGraw-Hill, 2012.
ISBN 978-0-07-338066-7
- [7] Jackson J. D: *Classical Electrodynamics*, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc.,1999.
ISBN 0-471-30932-X
- [8] Knoepfel, H. E, *Magnetic Fields - A Comprehensive Theoretical Tretease for Peactical Use*, John Wiley & sons, 2000,
ISBN 0-471-32206-9
- [9] Maxwell, J. C: *A Treatise on Electricity and Magnetism, Third Edition*, Dover Publicarion, Inc, New York, 1954.
ISBN 0-486-60636-8
- [10] McHarris, O, Signell, P: The Ampère–Laplace–Biot–Savart Law, *Project PHYSNET*, MISN-0-125.
- [11] Mitić, D.N: *Elektrotehnika 2 - u obliku metodičke zbirke zadataka*, Petrograf, Niš, 2008.
ISBN 978-86-7934-006-1
- [12] Mitić, D.N: *Elektrotehnika 2*, Petrograf, Niš, 2008.
ISBN 978-86-7934-003-0
- [13] Petković, D. M, Krstić, D. D, Stanković, V.B: *Elektromagnetni talasi i zračenje*, Fakultet zaštite na radu, Niš, 2014.
ISBN 978-86-80261-89-8
- [14] Petković, D. M, Radić, M .D: Generalization of Helmholtz Coil Problem, *Serbian Journal Of Electrical Engineering*, Vol. 12, No. 3, October 2015, pp. 375-384.
ISSN 1451 – 4869.
- [15] Petković, D. M: *Elektrostatičko polje - u radnoj i životnoj sredini - prvi deo*, Fakultet zaštite na radu, Niš, 2003,
ISBN 86-80261-39-4

- [16] Petković, D.M, Krstić, D.D, Stanković, V: *Stacionarno električno polje i jednosmerna struja*, Fakultet zaštite na radu, Niš, 2010.
ISBN 978-86-6093-014-1
- [17] Petković, D.M, Krstić, D.D: *Elektrostatika*, treće izdanje, Fakultet zaštite na radu, Niš, 2014.
ISBN 978-86-6093-052-3
- [18] Popović, B. D: *Elektromagnetika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1980.
- [19] Popović, B. D: *Zbornik zadataka iz elektromagnetike*, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.
- [20] Popović, B. D; Popović, Z: *Introductory Electromagnetics*, Prentice Hall, New Jersey, 2000.
ISBN 0-201-32678-7
- [21] Roche, J. J: *The Mathematics of Measurement: A Critical History*, The Athlone Press, London, 1988.
- [22] Surutka, J, V: *Elektromagnetika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1971.
- [23] Surutka, J. V: *Osnovi elektrotehnike - treći deo - elektromagnetizam*, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
- [24] Tamm, I. E: *Fundamentals of the Theory of Electricity*, Mir Publishers, Moscow, 1979.
- [25] Veličković, D. M: *Elektromagnetika - prva sveska*, Elektronski fakultet, Niš, 1994.

CIP - Каталогизација у публикацији -
Народна библиотека Србије, Београд

537.8(075.8)

ПЕТКОВИЋ, Дејан М., 1952=

Elektromagnetna zračenja. Sv. 3, Elektromagnetizam /
Dejan M. Petković.

- 1. izd. - Niš : Fakultet zaštite na radu, 2016
(Niš : Unigraf-X-Copy,). -
176 str. : ilustr. ; 24 cm

Na vrhu nasl. str.: Univerzitet u Nišu. - Tiraž 200. -
Bibliografija: str. 175-176.

ISBN 978-86-6093-015-8

а) Електромагнетизам

COBISS.SR-ID 223468044

