

Univerzitet u Nišu
Fakultet zaštite na radu, Niš

Dejan M. Petković

Dejan D. Krstić

Elektromagnetna zračenja - izvodi sa predavanja i vežbi
Sveska I

ELEKTROSTATIKA

treće izmenjeno i dopunjeno izdanje

Niš, 2014. godine

Autori

*Profesor dr Dejan M. Petković,
Dr Dejan D. Krstić, docent
Fakultet zaštite na radu, Niš.*

Naslov

*Elektromagnetna zračenja - izvodi sa predavanja i vežbi, Sveska I
ELEKTROSTATIKA*

Prvo izdanje, Niš, 2005.

Drugo izdanje, Niš, 2010.

Treće izdanje, Niš, 2014.

Izdavač

*Fakultet zaštite na radu, Niš
18000 Niš, Čarnojevića 10a*

Za izdavača

Dekan fakulteta, profesor dr Ljiljana Živković

Recenzenti

*Profesor dr Predrag Dimitrijević,
Prirodno-matematički fakultet, Niš
Profesor dr Dragan Veličković,
Fakultet zaštite na radu, Niš*

Odlukom Naučno-nastavnog veća Fakulteta zaštite na radu u Nišu,
kvalifikovano kao univerzitetski udžbenik.

Tehnička obrada

Autori

Korice

Rodoljub Avramović, dipl. ing. znr

Štampa

Rolerprint, Niš

Tiraž

200 primeraka

ISBN 978-86-6093-052-3

*Posvećeno uspomeni na profesora
Dragutina M. Veličkovića*

Sadržaj

Predgovor

Uvod - Elektrostatika do *Coulomba*

1 - *Coulombov* zakon

2 - Električno polje

3 - Prostorni ugao, fluks i divergencija

4 - Teorema *Ostrogradskyog*

5 - *Gaussov* zakon

6 - Rad sila polja i energija

7 - O izračunavanju rada i energije

8 - *Stokesova* formula, rotor vektora

9 - Energija, potencijal i napon

10 - Gradijent potencijala

11 - *Helmholtz*, *Poisson* i *Laplace*

12 - *Greenovi* identiteti

13 - Rešenje *Laplaceove* i *Poissonove* jednačine

14 - Provodnici

15 - Električna indukcija

16 - Kapacitivnost

17 - Uopštenje pojma kapacitivnosti - kondenzator

18 - Energija elektrostatičkog polja - 1

19 - Energija i sila

20 - Tačkasti simetrični električni dipol

21 - Tri teoreme

22 - Površinski električni dipol - dvojni električni sloj

23 - Dielektrici

24 - Polarizacija dielektrika

25 - Površinska gustina vezanih naelektrisanja

26 - Zapreminska gustina vezanih naelektrisanja

27 - *Maxwellov* postulat = treća *Maxwellova* jednačina

28 - Granični uslovi na razdvojnoj površini dva dielektrika

29 - Energija elektrostatičkog polja - 2

30 - Dielektrična sfera u homogenom električnom polju

31 - Kretanje elektrona i elektronska struja

32 - Elektronska struja u u vakuumskoj diodi

Prilozi

Predgovor

Tekst sa nazivom ELEKTROSTATIKA je namenjen studentima Fakulteta zaštite na radu u Nišu i trebalo bi da posluži kao pomoć pri proučavanju gradiva iz oblasti teorije elektrostatičkog polja, i to prema programu predmeta Elektromagnetna zračenja koji se u različitom obimu i sa različitim fondom časova izučava na smeru Zaštita na radu i smeru Zaštita životne sredine. Dobrim delom tekst može da posluži studentima smera Zaštita od požara za oblast koja je za njih od interesa, a to je statički elektricitet kao uzrok požara. Studenti drugih fakulteta kao što su elektrotehnički, prirodno-matematički ili tehnoški sigurno će u ovom tekstu naći nešto što do sada nisu znali.

Kako se radi o izvodima iz predavanja i vežbi, osnovna ideja je bila da jedna lekcija (ne i jedan čas predavanja) bude jedna stranica, a to nije bio lak zadatak. Određena skraćenja dokaza, ograničen broj rešenih primera, mali broj zadataka za samostalno rešavanje i obim teksta pokazuju da je cilj autora bio da studentima pruži neophodnu literaturu prilagođenu savremenim metodama učenja. Istovremeno to znači da je ovaj isti tekst dostupan svima koji koriste računarsku mrežu Fakulteta zaštite na radu.

U Nišu, početak proleća 2004. godine,

Autori ,

dejan.petkovic@znrfak.ni.ac.rs

dejan.krstic@znrfak.ni.ac.rs

Predgovor drugom izdanju

U drugom izdanju su ispravljane uočene greške, ali se ne razlikuje od prvog izdanja. Jednostavno knjiga je doštampana jer su svi primerci bili rasprodati.

U Nišu, oktobra 2010. godine,

Autori

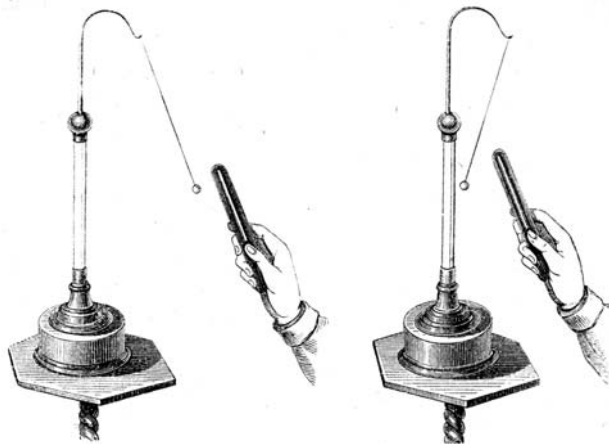
Predgovor trećem izdanju

Deset godina nakon prvog izdanja pojavljuje se treće izdanje ovog udžbenika. U protekloj deceniji na Fakultetu zaštite na radu u Nišu je došlo do značajnih promena u nastavnim planovima i programima. Ne želeći da kvarimo prvobitnu koncepciju udžbenika sadržaj smo prilagodili tako da prati predavanja kako iz predmeta *Elektromagnetna zračenja* na svim smerovima, tako i iz predmeta *Elektrotehnika* i *Zaštita od atmosferskog i statičkog naelektrisanja*. Napominjemo da se određene lekcije na nižim kursovima ne izučavaju. Ovo izdanje sadrži više rešenih primera nego prethodna dva. Takođe, izvođenja su data detaljnije, tj. prilagođena su studentima druge godine studija jer se pretpostavlja da još uvek nemaju neophodna znanja iz vektorske algebre i matematičke analize.

U Nišu, Božić 2014. godine,

Autori

UVOD



Uvod - Elektrostatika do Coulomba

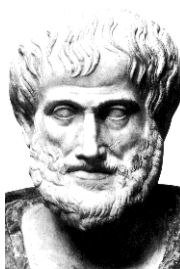
U vreme antičke Grčke bile su poznate četiri pojave koje su povezane sa električnošću. To su munja, svetlučenje oko šiljatih predmeta, ribe koje proizvode neku vrstu električnih udara i privlačenje laganih predmeta (slama) pomoću protrljanog komada ćilibara. Ove pojave su bile uočene a sa električnošću povezane čitavih 2500 godina kasnije.

Vrhovni bog Grka *Zéus* je upravljao munjom i vetrom (davalac kiše). Za svetlučenje katarki na brodovima koji su plovili Mediteranom bio je odgovoran lokalni svetac *Erasmus* koji je bio zaštitnik mornara. *Aristotel* (*Aristotle*, 384-322, pre n.e.) je opisao ribu torpiljarku ali nije uočio električni organ. *Tales iz Mileta* (*Thalés Miléisos*, oko 625-547. pre n.e.) je znao za privlačnu moć ćilibara koji su Sirijci zvali kamen kradljivac a Persijanci kradljivac slame (karuba). Grčki naziv elektron ima značenje onaj koji privlači. U to vreme pominje se kamen *linkurion*, koji ima još veću moć privlačenja. Verovatno se radi o turmalinu ili topazu jer se sa privlačenjem pominje i zagrevanje kamena.

U svim dokumentima iz tog perioda koji su sačuvani pominje se samo privlačenje. Odbojne sile tada nisu primećene. Razlog za to je svuda prisutna gravitacija i znatno veće interesovanje za magnet koji privlači gvožđe ma kako veliko bilo, dok ćilibar privlači različite ali samo veoma lagane predmete. Takođe, pojava odbijanja nije mogla da se uklopi *Aristotle*ovo učenje i učenje njegovih sledbenika. Tek u šestom veku nove ere odbijanje kod magneta pominje hrišćanin *Jovan Filopon*.

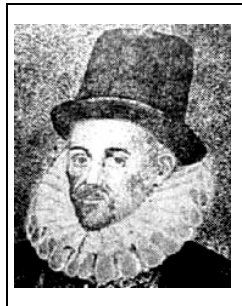
Arapi su prihvatili helenistička učenja o magnetizmu i električnošću, i neizmenjena su ih preneli u hrišćansku Evropu. Istina unose i neke zablude. Govorilo se o kvalitetu privlačenja.

O magnetu nema pouzdanih zapisa, a za ćilibar se kaže da je tu kvalitet privlačenja toplota jer protrljani ćilibar zagreva slamu koju privlači. Druga velika zabuda koju su uneli odnosi se na magnet koji gubi privlačna svojstva ako se protrlja belim lukom. Ovakvo tumačenje se uklapalo u opštu teoriju kvaliteta, jer u ovom slučaju dolazi do promene kvaliteta. Takva učenja, preneti su u Evropu dvanaestog i trinaestog veka, kada je kompas već uveliko bio u upotrebi, dovela su do toga da je navigatorima na brodovima bilo zabranjeno da jedu beli luk.

*Zéus**Thalés Miléisos**Aristotle*

Doba renesanse je izuzetno značajno za magnet (kompas) zbog ogromnog interesovanja za daleka putovanja, ali ne i za elektricitet. Treba ipak izdvojiti da je *Porta* (*Giovani Battista Porta*, 1538-1615) prvi upotrebio gvozdene opiljke da bi na listu hartije načinio sliku linija sila, i da je prvi koji tvrdi da beli luk ne utiče na magnet.

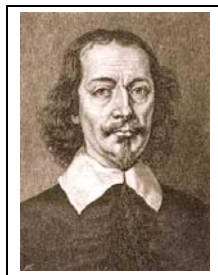
Za *Gilbertovo* (*William Gilbert*, 1540-1603) delo "*De Magnete*" koje je objavljeno 1600. godine se tvrdi da je bilo savremenije od mnogih dela koja su kasnije napisana. I pored toga što u svojim razmatranjima sledi Arisotelovu školu, tvrdeći da se tela ili privlače ili ne, ipak daje puno doprinosa. Treba istaći njegovu pretpostavku da je zemlja magnet. Njegovo delo podeljeno je u šest knjiga sa ukupno 125 poglavlja, i samo jedno poglavlje je posvećeno elektricitetu.



Međutim, i to malo što je napisao ima izuzetan značaj. Prvo je ogledima utvrdio, zatim i opisao, da mnoge materije kao što su staklo, vosak ili sumpor kada se protrljaju mogu da privuku druga laka tela i to, ne samo slamu, već i gvožđe, drvo, ulje ili vodu. Po njemu su to električne materije. Drugu grupu neelektričnih materija čine metali, drvo ili kamen. Za ispitivanje privlačenja konstruisao je prvi elektroskop koji naziva versorijum (Lat.: *verso* - okretati, obrtati). To je bila rotirajuća metalna igla - praktično kopija kompasa. Eksperimenti sa versorijumom su mu omogućili da uoči sličnosti ali i razlike između magnetizma i elektriciteta. Zaključio je da se električno privlačenje ostvaruje fluidom koji ima materijalnu prirodu, za razliku od onog kod privlačenja magnetu koji nije materijalan. Time je došao u sukob sa *Aristotleovim* učenjem. Ovo delo, zasnovano isključivo na rezultatima koji su rezultat ogleda, ostalo je važno još dva veka.

Cabeo (*Nicolo Cabeo*, 1585-1650) je 1639. godine objavio delo pod nazivom *Magnetna filozofija* koje je većinom prepričavanje *Gilbertovih* ogleda. Međutim, u delu se nalaze i neki novi podaci. Prvi put se sreće termin linije sile (Lat.: *lineae virtutis*). Takođe, prvi put se pominje da se u svakoj tački u okolini magnetu osećaju dve akcije koje potiču od severnog i južnog pola i da se ukupna sila dobija slaganjem te dve akcije. Ovakvim, kvalitativno tačnim opisom *Cabeo* praktično uvodi vektore, ali kvantitativno znatno greši. U posmatranoj tački akcije koje potiču od dva pola su jednake i ne zavise od rastojanja, i drugo uvek imaju takav smer kao da su oba pola iste prirode. *Cabeo* je uočio odbijanje kod naelektrisanih tela. Međutim, ovom predstavniku jezuitske škole, nasledniku *Aristotela* i *Gilberta* to nije prihvatljivo i prirodno, jer mnogo različitih materijala učestvuje u tome. Tako je zbog dogmi propustio priliku da otkrije nešto sasvim novo.

Guericke (*Otto von Guericke*, 1602-1686) je bio eksperimentator koji je voleo da javno prikazuje različite fizičke fenomene. Između ostalog, napravio je aparat koji je preteča elektrostatičke mašine. To je bila rotirajuća lopta od sumpora na drvenoj osovini i drvenom postolju. Na površini kugle se nagomilavao elektricitet ako se jednom rukom rotira drvena osovina a drugom rukom lagano drži sama kugla.



Uočio je postojanje odbojnih sila, fosforescenciju, električno pražnjenje i efekat oštih vrhova. Svoja zapažanja je 1672. godine opisao u delu *Novi eksperimenti* ali nije pokušao ni da ih objasni, a još manje da formuliše neko pravilo ili zakon. Zbog toga su te iste pojave ponovo bile otkrivene tek posle pedeset godina, a ovog eksperimentatora čija su osnovna opredeljenja bile diplomatija i politika retko ko pominje.

Boyle (*Robert Boyle*, 1627-1691) je utvrdio da se električna i magnetna sila ništa ne menjaju ako se iz prostora u kome se ogled obavlja izvuče vazduh. To je u ozbiljnu sumnju dovelo sve modele koji su se oslanjali na *Aristotleovo* učenje. Uočio je da je naelektrisanje veće i trajnije ako je površina koja se trlja glatka, čista i topla. Ponavljao je ogled *Guericke*a, ali ni on nije uočio električnu indukciju, i pored toga što je imao sve potrebne rezultate.

Gray (*Stephen Gray*, 1666-1736) je otkrio da elektricitet može da se prostire sa jednog tela na drugo. U početku je došao do sasvim pogrešnog zaključka da se elektricitet može prenositi samo vertikalno. Verovatno povučen tim zaključkom, i tražeći sve veću visinu, ogled je nastavio sa sveštenikom *Wheelerom* (*Granvile Wheeler*, 1701 - 1770) u zvoniku crkve.



Zahvaljujući upornosti sveštenika, ogled je ponovili u nekoj štali gde su horizontalno postavljali dugačke provodnike obešene o plafon svilenim koncima. Zaključili su da se električna sposobnost prenosi i horizontalno. Zatim su povećavali dužinu provodnika (time i težinu) pa su svileni konac, koji je bio preslab, zamenili gvozdenom i mesinganom žicom. Tada nisu dobili očekivane rezultate. Međutim, izveli su pravilan zaključak. Oni su zaključili da postoje dve grupe materijala. U jedni grupu spadaju oni materijali koji provode elektricitet, kao što su metali, a u drugu grupu spadaju oni koji ne provode elektricitet, kao što su svila, konjska dlaka, staklo. Tako, prvi put dobijamo podelu materijala na provodnike i izolatore.

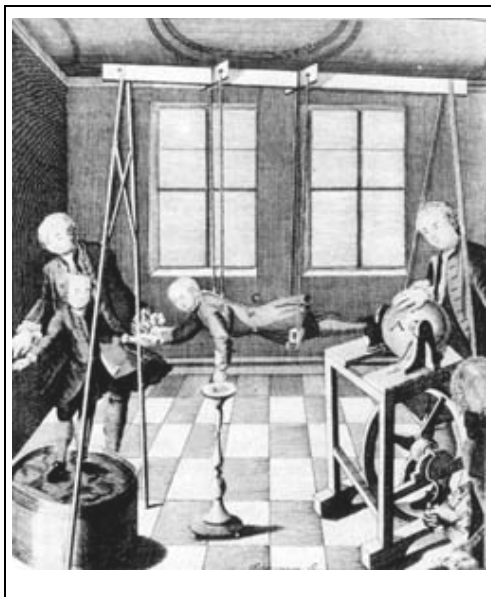
Daljim istraživanjima *Gray* je došao do zaključka da se elektricitet zadržava samo na površini tela. Znajući da gravitaciono i magnetno privlačenje zavise od

veliĉine tela i da se toplotni i magnetni fluidi prostiru kroz zapreminu, zapitao se kakav uticaj na elektriĉno privlaĉenje ima veliĉina tela. Uzeo je dve kocke od hrastovine jednakih dimenzija stim što je jedna bila šuplja a druga puna. Obe kocke kad su bile naelektrisane pokazivale su ista svojstva. Dakle, neelektrisanje ne zavisi od zapremine već samo od površine tela. Tako, prvi put dolazimo do pojma površinske gustine naelektrisanja. U nastavku svojih istraŹivanja prouĉavao je tupe i šiljate predmete. Na oble, tupe predmete varnica skaĉe sa naelektrisanog tela, a kroz zašiljene predmete se elektricitet prazni neĉujno i polako. Tako, prvi put dolazimo do pasivnog eliminatora statičkog naelektrisanja.

Stephen Gray je izvršio prvo javno naelektrisanje ljudskog bića.

Gray je neko dete obesio o vrpce naĉinjene od konjske dlake, tako da visi u horizontalnom poloŹaju. Protrljanim staklom mu je dotakao noge i pri tom su laki predmeti bili privuĉeni glavi. Takav ogled ponovio je sa dva deteta koja su bila na podlozi od smole (izolator prema zemlji) i meĉusobno vezana kanapom. Elektricitet se prenosio sa jednog deteta na drugo dete.

Dve hiljade godina nauka je znala samo za statički elektricitet. Definišući provodnost, *Gray* otvara nove puteve - puteve elektriĉne struje. Tako, prvi put dolazimo do pojma o elektriĉnoj struji.



Gray je ustanovio da naelektrisani ključ privlaĉi lake predmete bez obzira da li jednovremeno na taj ključ deluje neki magnet. Tako, prvi put dolazimo do pojma o elektromagnetizmu.

Du Fay (*Charles-Francois de Cisterny du Fay*, 1698-1739) se nadovezuje na oglede svog predhodnika *Graya*, ali za razliku od njega rezultate do kojih je došao, u formi osam saopštenja, podnosi Akademiji nauka u Parizu. Prva ĉetiri saopštenja je podneo 1733. i 1734. godine. Još dva saopštenja podnosi kad je imao 39 godina, samo dve godine pred smrt.



Prvo saopštenje je pregled saznanja o elektricitetu za period od *Gilberta* do *Graya*. Drugo saopštenje zasniva se na ogledima koje je izveo. Zaključio je da se sva tela mogu naelektrisati. Neka tela, kao što su metali ili tečnosti, nije moguće naelektrisati trljanjem, ali se naelektrišu ako im se prinese neko prethodno naelektrisano telo. U trećem saopštenju materijale deli na dve grupe (mada je to pre njega učinio *Gray*). Tela koja je teže naelektrisati trljanjem dalje i obimnije prenose električnu materiju. Suprotno, tela koja lakše postaju električna manje su podobna da prihvate tudi elektricitet i da ga prenesu na daljinu. Kasnije su ove dve grupe materijala dobile nazive provodnici i izolatori.

Četvrto saopštenje, *O privlačenju i odbijanju električnih tela*, donosi nov kvalitet. Još je *Guericke* uočio da naelektrisano pero širi svoje dlačice. Međutim, *Du Fay* ponavlja ogleda sa različitim koncima (svila, pamuk, vuna) i donosi opšti zaključak.

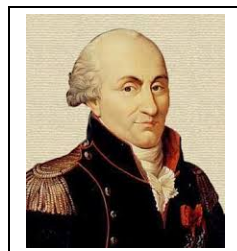
Kad se neko telo naelektriše njegovi delovi se međusobno odbijaju i nastoje da se međusobno što je moguće više udalje.

Znajući za električno privlačenje, vrši ogled sa zlatnim listićem. Ako se zlatni listić naelektriše staklom njega privlače smolaste materije i obrnuto. Kao da postoje dve različite vrste elektriciteta. Sledećim ogledom dokazuje da se obe vrste elektriciteta mogu preneti na neelektrično telo. Konačno ubeđen da postoje dve vrste elektriciteta daje im različite nazive: staklasti i smolasti elektricitet. Ponovo donosi opšti zaključak.

Jedni i drugi odbijaju tela koja su primila elektricitet iste prirode kao što je njihov, a privlače ona čiji je elektricitet suprotan njihovom.

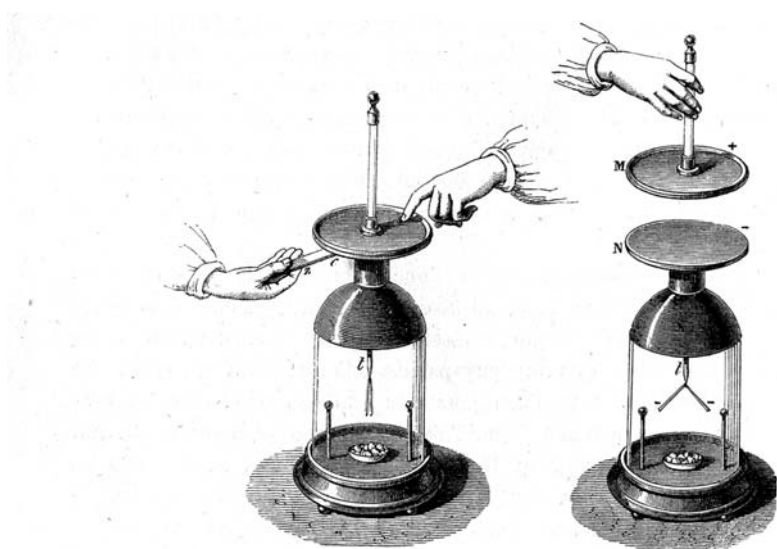
Du Fay je usavršio *Gilbertov* versorijum. Od dva zlatna listića napravio je prvi pravi elektroskop. Proučavao je i provodljivost plamena. Treba napomenuti da u prvo vreme hipoteza o dve vrste elektriciteta nije naišla na odobravanje.

Godinu dana pre poslednjeg *Du Fayovog* saopštenja Akademiji nauka, 1737. godine, rodio se *Coulomb* (*Charles Augustin de Coulomb*, 1736-1806). Zakonom koji je formulisao završava se kvantitativna analiza elektrostatičkog polja. Sve nadalje postaje matematička nadgradnja koja elektrostatičku stavlja u opšti teorijski koncept elektromagnetnog polja.



U Srbiji je 1877. godine objavljen prevod knjige *A. Gamoa EKSPERIMENTALNA FIZIKA*. U delu IX pod nazivom *STATIČKI ELEKTRICITET*, a koji je podeljen na šest glava, jedina formula je upravo *Coulombov* zakon.

LEKCIJE



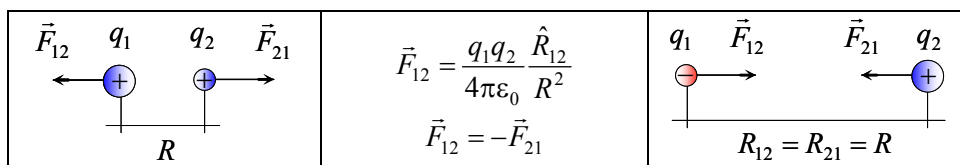
1 - Coulombov zakon

Proučavanje elektrostatike često počinje od *Coulombovog* zakona koji je rezultat eksperimentalnih istraživanja iz 1785. godine.

$$F = k \frac{q_1 q_2}{R^2}$$

Dva naelektrisana tela beskonačno malih dimenzija, u odsustvu drugih naelektrisanih tela, deluju jedno na drugo mehaničkom silom, $\vec{F}$, čiji je intenzitet (jačina), F , srazmeran proizvodu njihovih električnih opterećenja, q_1 i q_2 , (količina naelektrisanja ili samo naelektrisanja) i obrnuto srazmeran kvadratu njihovog međusobnog rastojanja, R .

Pravac sile spaja tačke u kojima se posmatrana tela nalaze i smer je takav da se tela odbijaju ako su električna opterećenja istog znaka ili privlače ako su ta opterećenja suprotnog znaka. Ova sila je električnog porekla pa su uobičajeni nazivi električna sila, elektrostatička sila, ili Coulombova sila.



Konstanta ϵ je permitivnost ili propustljivost sredine ili dielektrična konstanta. Sam naziv dobija smisao pri izučavanju elektrostatičkih polja u materijalnim sredinama u kojima dielektrična propustljivost najčešće i nije konstantna. Na osnovu merenja brzine svetlosti, koja su obavljena u prošlom veku, dobijena je vrednost ove konstante za vakuum (i približno za vazduh).

$$\epsilon_0 = (8.85419 \pm 0.00002) \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

U racionalizovanom načinu pisanja jednačina, koji je danas opšte prihvaćen, ova konstanta se piše u obliku

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}.$$

Na ovaj način konstanta 4π je eliminisana iz velikog broja jednačina koje se koriste u elektrostatiki i uopšte u elektromagnetici.

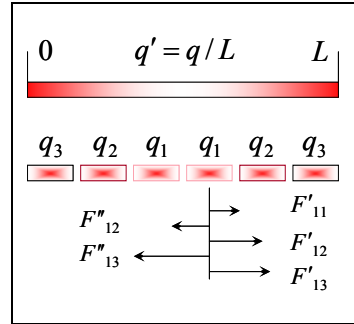
Tačkasta naelektrisanja mogu biti raspoređena po proizvoljnoj niti ili površi, ili pak mogu da budu raspoređena u određenom delu zapreminine. Tako se dolazi do pojmova podužna, površinska i zapreminska gustina naelektrisanja:

$$q' = \frac{q}{L} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}} \right], \quad \eta = \frac{q}{S} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right], \quad \rho = \frac{q}{V} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right].$$

U svim slučajevima *Coulombov zakon* je moguće primeniti na "beskonačno" male delove. To je princip linearne superpozicije.

Primer 1.1 - Raspodela naelektrisanja na štapu

Kad se štap dužine L naelektriše nekom količinom naelektrisanja q , ta naelektrisanja se delovanjem međusobnih odbojnih sila rasporede duž štapa. U najvećem broju slučajeva smatramo da je raspodela naelektrisanja uniformna i govorimo o podužnoj gustini naelektrisanja $q' = q/L$. Kad je dužina štapa znatno veća od poprečne dimenzije, ova aproksimacija je vrlo tačna za najveći deo sredine štapa.



Do realnije raspodele naelektrisanja može da se dođe ako se štap podeli na $2N$ jednakih odsečaka. Rastojanje između centara dva susedna odsečka je $a = L/2N$, mada to za rešavanje problema nije od značaja. Svaki odsečak je tačkasto naelektrisanje u njegovom centru. Što je broj podela veći aproksimacija je tačnija. Električne sile koje deluju na naelektrisanja na krajnjim odsečcima su u ravnoteži sa mehaničkim silama, jer naelektrisanja ne napuštaju štap. Ostala naelektrisanja su u ravnoteži isključivo zbog odbojnih sila električnog porekla.

Za $N = 3$, a za tačkasta naelektrisanja q_1 i q_2 mogu da se postave dve jednačine sa tri nepoznata tačkasta naelektrisanja. Treća jednačina je izraz za zbir svih nepoznatih naelektrisanja.

Sistem jednačina preuređen na oblik pogodan za rešavanje dovodi do rezultata

$$q_1 = 0.142q$$

$$q_2 = 0.151q$$

$$q_3 = 0.207q$$

Iz ovog oblika se lako dolazi do izraza za elemente matrice u opštem slučaju,

$$i = 1, N-1, \quad j = 1, N.$$

Poslednja jednačina je uvek jednačina zbira.

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \left(\frac{q_1}{1^2} + \frac{q_2}{2^2} + \frac{q_3}{3^2} \right) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \left(\frac{q_2}{1^2} + \frac{q_3}{2^2} \right)$$

$$\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \left(\frac{q_1}{1^2} + \frac{q_1}{2^2} + \frac{q_2}{3^2} + \frac{q_3}{4^2} \right) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \left(\frac{q_3}{1^2} \right)$$

$$2q_1 + 2q_2 + 2q_3 = q$$

$$q_1 \left(\frac{1}{1^2} \right) + q_2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right) + q_3 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 0$$

$$q_1 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \right) + q_2 \left(\frac{1}{3^2} \right) + q_3 \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{1^2} \right) = 0$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1/2$$

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{(i+j-1)^2} - \frac{1}{(i-j)^2}, & i < j \\ \frac{1}{(2i-1)^2} = \frac{1}{(2j-1)^2}, & i = j \\ \frac{1}{(i+j-1)^2} + \frac{1}{(i-j)^2}, & i > j \end{cases}$$

U uravnotežnom stanju raspodela naelektrisanja nije uniformna i najveća gustina je na krajevima. Uopšte, oštre ivice i šiljci sadrže najveće gustine naelektrisanja.

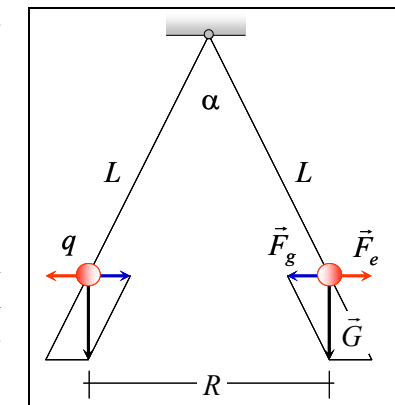
Primer 1.2 - Dva tačkasta naelektrisanja i elektroskop

Razvoj teorijske elektrostatike neminovno je pratio i razvoj instrumenata za detekciju i merenje statičkog elektriciteta. Prvi metod za merenje bio je zasnovan na ravnoteži gravitacione i električne sile.

To je prvi uočio *Du Fay* (*Charles Francoide Cisternais du Fay*, 1698-1739).

Ako se dva naelektrisana tela koja slobodno vise jedno uz drugo, povežu sa naelektrisanim telom, ona se odbijaju srazmerno naelektrisanju.

Dve kuglice istih težina G , vise na nitima istih dužina L . Kad se kuglice naelektrišu nekom količinom naelektrisanja q , niti o koje su kuglice obešene grade ugao α .



Električna tj. *Coulombova* sila F_e i horizontalna komponenta gravitacione sile F_g su u ravnoteži.

$$F_e = F_g \quad \Rightarrow \quad \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = G \tan \frac{\alpha}{2}.$$

gde su $R = 2L \sin \frac{\alpha}{2}$ i $G = mg$, i gde je m masa kuglice.

Odavde je moguće odrediti količinu naelektrisanja na osnovu ugla koji grade niti o koje su naelektrisane kuglice obešene,

$$|q| = 4L\sqrt{\pi\epsilon_0 G} f(\alpha), \text{ gde je } f(\alpha) = \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\tan \frac{\alpha}{2}}.$$

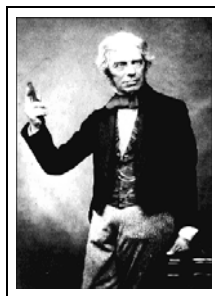
Zadatak 1.1 - Tri tačkasta naelektrisanja jednake količine naelektrisanja se nalaze u temenima zamišljenog jednakostraničnog trougla čija je stranica a . Odrediti sve sile međusobnog delovanja.

Zadatak 1.2 - Tačkasto naelektrisanje q nalazi se na osi beskonačno tankog kružnog obruča poluprečnika a koji je ravnomerno naelektrisan istom količinom naelektrisanja suprotnog znaka. Odrediti rastojanje od ravni obruča gde je privlačna sila najveća.

Zadatak 1.3 - Beskonačno dug i prav provodnik zanemarljive debljine naelektrisan je podužnom količinom naelektrisanja q' . Na rastojanju r od ose provodnika nalazi se tačkasto naelektrisanje q i potrebno je odrediti silu između ova dva naelektrisanja.

2 - Električno polje

Električno polje je posebno stanje sredine koje se manifestuje postojanjem mehaničke sile koja deluje na neku količinu naelektrisanja. Pojam fizičkog polja je prvi uveo *Faraday* (*Michael Faraday*, 1791-1867) ali tek pri proučavanju elektromagnetne indukcije kad je već bilo naslućeno da su električno i magnetno polje neraskidivo vezani fenomeni i predstavljaju jedinstveno elektromagnetno polje.



Električno polje je definisano kao količnik mehaničke sile $\vec{F}$ kojom polje dejstvuje na probno naelektrisanje q_0 i same količine naelektrisanja koja stvara polje.

$$\vec{E} = \frac{1}{q_0} \vec{F} \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right]$$

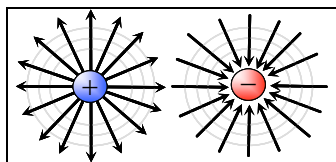
Električno polje usamljenog tačkastog naelektrisanja, q , određuje se direktno iz *Coulombovog* zakona.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{R}$$

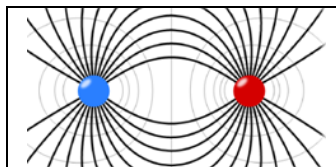
Linija polja je linija čija se tangenta u svakoj tački prostora poklapa sa pravcem vektora polja.

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

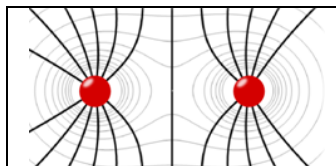
Električno polje je izvorno polje. Postojanje neke količine naelektrisanja je uvek uslovljeno postojanjem iste količine naelektrisanja suprotnog znaka. Dogovorom je usvojeno da su pozitivna naelektrisanja izvori, a negativna naelektrisanja ponori električnog polja.



Usamljeno tačkasto naelektrisanje ne postoji tj. naelektrisanje suprotnog znaka je veoma daleko od prostora koji se razmatra.



Fluks je pojam koji, kao i pojam vektorskog polja, potiče iz hidrodinamike i uveden je zbog proračuna količine tečnosti koja protekne kroz neki poprečni presek (cevi).



Neka se u centru zamišljene sfere poluprečnika r nalazi tačkasto naelektrisanje q . U svim tačkama ove sferne površine električno polje ima istu jačinu i radijalan pravac, pa je broj linija polja (fluks) koje prolaze kroz površinu cele sfere Φ .

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = E \oint_S dS = ES = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Primer 2.1 - Ravnomerno naelektrisana kružna ploča

Kružna ploča poluprečnika a naelektrisana je površinskom gustinom naelektrisanja η . Svaka elementarna površina $dS = r dr d\theta$ je tačkasto naelektrisanje koje na simetralnoj osi stvara električno polje

$$dE = \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{R^2}, \quad R = \sqrt{z^2 + r^2}.$$

Zbog osne simetrije sve radijalne komponente vektora električnog polja se anuliraju, pa polje ima samo aksijalnu komponentu,

$$dE_z = \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0} \frac{z r dr d\theta}{(z^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Konačno je

$$E_z = \frac{\eta z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z/a}{\sqrt{1 + (z/a)^2}} \right) = \frac{\eta}{2\epsilon_0} f(z/a).$$

Kako vektor električnog polja ne zavisi od ugaone koordinate, problem je moguće rešiti i posmatranjem niza koaksijalnih kružnih prstenova površine

$$dS = (r + dr)^2 \pi - r^2 \pi = \pi(2r dr - (dr)^2) \Rightarrow dS = 2\pi r dr,$$

što je ustvari isto kao da je unapred rešen integral po ugaonoj koordinati.

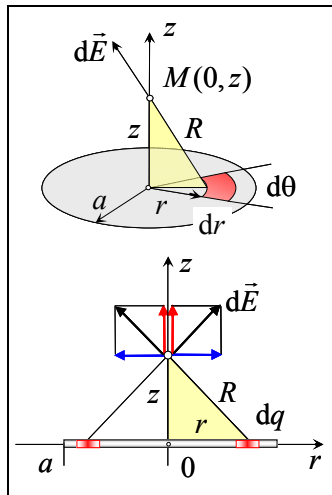
♦ Kad se poluprečnik ploče beskonačno uvećava, $a \rightarrow \infty$, dobija se izraz za električno polje naelektrisane ravni.

$$\vec{E} = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

Električno polje naelektrisane ravni očigledno ne zavisi od rastojanja. Ostavlja se čitaocu da objasni ovaj rezultat.

♦ Sa unapred poznatom greškom ravna površina konačnih dimenzija se može tretirati kao beskonačna ravan. Tako ako je rastojanje tačke u kojoj se polje određuje deset puta manje od poluprečnika ploče i električno polje je deset procenata manje od onog koje bi stvorila beskonačna ravan.

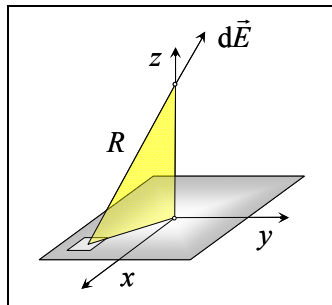
Zadatak 2.1 - U tačkama na osi simetrije odrediti električno polje koje potiče od ravnomerno naelektrisane kružne konture.



Primer 2.2 - Ravnomerno naelektrisan kvadratna ploča

Kvadratna ploča stranice a naelektrisana je površinskom gustinom naelektrisanja η . Svaka elementarna površina $dS = dx dy$ je tačkasto naelektrisanje koje na simetralnoj osi stvara električno polje

$$dE = \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{R^2}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Zbog osne simetrije sve radijalne komponente vektora električnog polja se anuliraju, pa polje ima samo aksijalnu komponentu,

$$E_z = \frac{8\eta}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad S: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x.$$

Smenom $x = z r \cos \theta$, $y = z r \sin \theta$, $dx dy = z^2 r dr d\theta$, se dobija

$$E_z = \frac{2\eta}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\frac{a}{2z \cos \theta}} \frac{r dr}{(r^2 + 1)^{3/2}} = \frac{2\eta}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \frac{2z \cos \theta d\theta}{(a^2 + 4z^2 \cos^2 \theta)^{1/2}} \right).$$

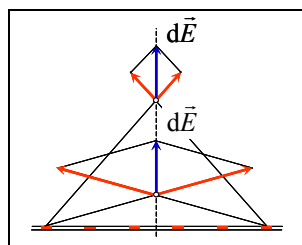
Dobijeni integral se rešava smenom $2z \sin \theta = \sqrt{a^2 + 4z^2} \sin t$, tako da je konačno

$$E_z = \frac{2\eta}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi}{4} - \arcsin \sqrt{\frac{2(z/a)^2}{(1 + 4(z/a)^2)}} \right).$$

Kada $a \rightarrow \infty$ kvadrata ploča postaje neograničena ravan i dobija se već poznat rezultat (primer 2.1).

$$\vec{E} = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

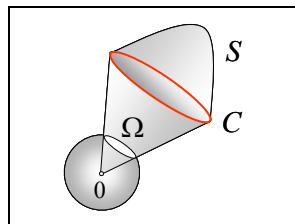
Objašnjenje zašto jačina električnog polja ne zavisi od rastojanja je zasnovano na razmatranju naelektrisanja simetrično lociranih u odnosu na osu u čijim tačkama se polje određuje. U tačkama vrlo blizu ravni električno polje koje potiče od udaljenih naelektrisanja je skoro paralelno ravni i njihovo rezultantno polje je jednako nuli ili je vrlo blizu nule.



Ostaje uticaj samo jedne tačke, a to je tačka prodora ose kroz ravan. Za tačke veoma udaljene od ravni uticaj svih tačaka je skoro isti. U konačnom zbiru rezultat je uvek isti. Jasno, ovo razmatranje važi samo za neograničenu ravan. Do istog rezultata dovodi primena analize koja tek sledi.

3 - Prostorni ugao, fluks i divergencija

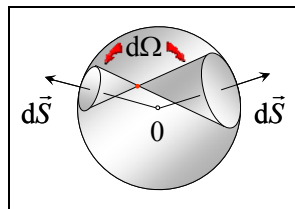
Uvođenje pojma prostornog ugla, koji je u neposrednoj vezi sa pojmom fluksa, omogućava razumevanje suštine postojanja fizičkog polja i olakšava rešavanje složenih problema teorije polja. Sve površine S oslonjene na konturu C se vide pod istim prostornim uglom. Prostorni ugao je brojno jednak delu površine sfere koju isecaju zraci iz centra sfere jediničnog poluprečnika ka konturi objekta.



$$\Omega = \int_S \frac{\hat{r}}{r^2} d\vec{S}$$

$$\Omega = \frac{1}{r^2} \oint_S d\vec{S} = \frac{S}{r^2} = 4\pi$$

Prostorni ugao je fluks vektorske funkcije $r^{-2}\hat{r}$ kroz zamišljenu površinu S . Jedinica za prostorni ugao je steradian sa oznakom srad . Pun prostorni ugao se jednostavno dobija ako je zamišljena površina sfera.

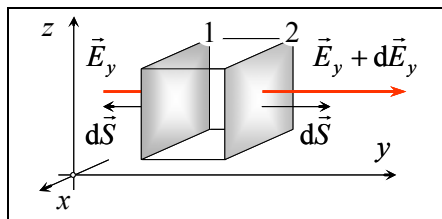


Usled dejstva odbojnih sila na naelektrisanjoj metalnoj sferi naelektrisanja se raspoređuju ravnomerno po površini. Iz proizvoljne tačke u unutrašnjosti sfere, elementarne centralno simetrične površine se vide pod istim prostornim uglovima, pa je ekvivalentno električno polje koje stvaraju dve takve površine jednako nuli. Isto važi i za bilo koji drugi par površina.

$$d\vec{E}_1 = -d\vec{E}_2 = \frac{\eta d\Omega}{4\pi\epsilon_0} \hat{n}$$

U unutrašnjosti provodnika električno polje je jednako nuli i nije važno da li je taj provodnik pun ili šupalj.

Pojam divergencije neke vektorske funkcije lako je uvesti razmatranjem proticanja nestišljivog fluida. Ono što važi za vektorsku funkciju $\vec{v}(\vec{r})$ kojom je opisano brzinsko polje, važi i za električno polje $\vec{E}(\vec{r})$.



Prvo se odredi fluks vektora električnog polja za par paralelnih stranica (1 i 2) elementarnog paralelepipeda. Zatim se postupak ponovi za preostala dva para stranica i dobijeni izrazi se saberu da bi se odredio fluks za elementarnu zapreminu. Dobijeni izraz je divergencija vektora u pravouglom koordinatnom sistemu, pa sledi i izraz za ukupni fluks gde nije od značaja sam oblik zapremine.

$$d\Phi = (E_y + dE_y - E_y) dS = \frac{\partial E_y}{\partial y} dV$$

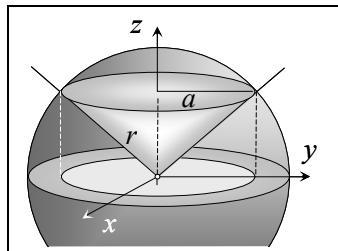
$$d\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV$$

$$d\Phi = \text{div } \vec{E} dV$$

$$\Phi = \int_V \text{div } \vec{E} dV$$

Primer 3 - Prostorni ugao pod kojim se vidi kružna ploča

Prostorni ugao pod kojim se kružna ploča poluprečnika a vidi iz tačke koja pripada vertikalnoj simetrali ploče i nalazi se na visini z od ploče je $\Omega = S/r^2$, gde je S površina koju iz sfere poluprečnika r iseca koaksijalni cilindar poluprečnika a . Površina koju iz sfere iseca cilindar je



$$S = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \text{ gde je oblast integracije } S: x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Kako je jednačina gornje polovine sfere

$$z = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)},$$

to su potrebni parcijalni izvodi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}},$$

pa je

$$S = \iint_S \frac{r dx dy}{\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}}.$$

Smenama $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ i nakon rešavanja integrala sledi da je

$$S = 2\pi r \left(r - \sqrt{r^2 - a^2} \right) = 2\pi r (r - z) = 2\pi r h,$$

gde je h visina kalote. Za prostorni ugao i jačinu električnog polja u tačkama na osi ploče (videti primer 2) se dobija

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = 2\pi \left(1 - \frac{z}{r} \right) = 2\pi \left(1 - \frac{z/a}{\sqrt{1 + (z/a)^2}} \right), \quad E_z = \frac{\eta \Omega}{4\pi \epsilon_0} = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z/a}{\sqrt{1 + (z/a)^2}} \right).$$

Zadatak 3.1 - Odrediti prostorni ugao pod kojim se vidi poluravan

Zadatak 3.2 - Odrediti $\text{div}(\vec{R})$

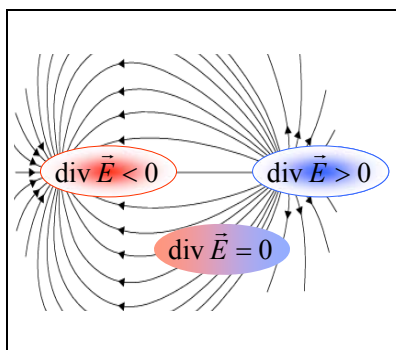
Zadatak 3.3 - Odrediti $\text{div}\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right)$.

4 - Teorema Ostrogradskyog

Iz dva poslednja izraza za fluks vektora električnog polja sledi teorema divergencije,

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S}, \quad \Phi = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV \Rightarrow \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV$$

ili teorema poznatija kao teorema *Ostrogradskyog* (*Mikhail Ostrogradsky*, 1801-1862), koja pod određenim uslovima važi i za druga vektorska polja.



Fluks karakteriše ukupni kapacitet izvora ili ponora. Kada je $\Phi > 0$ posmatrana zapremina sadrži izvore polja, u slučaju $\Phi < 0$ zapremina sadrži ponore polja (ili negativne izvore), i u slučaju $\Phi = 0$ u zapremini nema ni izvora ni ponora ili zapremina obuhvata i izvore i ponore iste izdašnosti. Ovo je još jedan dokaz da je ispravno pozitivna naelektrisanja smatrati izvorima, a negativna ponorima polja.

Ukupni fluks kao integralna veličina je isto što i divergencija kao lokalna ili diferencijalna veličina.

Električno polje je izvorno polje. Tamo gde nema izvora ili ponora linije polja su neprekidne. Jedini izuzetak od ovog pravila su singularne tačke (ili linije) ili tačke neodređenosti, tj, tačke u kojima polje isčezava, pa pravac linija polja postaje neodređen. Takva je, na primer, tačka na sredini između dva jednaka tačkasta naelektrisanja istog znaka.

Međutim, na osnovu ukupnog fluksa ništa se ne može zaključiti o raspodeli izvora i ponora u posmatranoj zapremini V . To je moguće pomoću diferencijalnih veličina kao što je divergencija koja daje vezu između samog izvora i polja u njegovoj neposrednoj okolini.

Zbog toga fluks treba razmatrati po jedinici zapremine. Ovaj

$$\left\| \frac{1}{V} \oint_S \vec{E} d\vec{S} \right.$$

količnik izražava srednju gustinu izvora (ponora).

Ako se posmatra granična vrednost ovog izraza kad zapremina prelazi u tačku, tj. kad $V \rightarrow 0$, dobija se izvod fluksa po zapremini što je divergencija vektora ili gustina fluksa. Dakle, divergencija vektora je prostorni izvod.

Iz definicije divergencije je jasno da vrednost ove skalarne veličine uopšte ne zavisi od izbora koordinatnog sistema.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{E} d\vec{S}$$

Primer 4 - Jedna primena teoreme Ostrogradskyog

Ako se izraz koji iskazuje teoremu *Ostrogradskyog* u *Descartesovom* koordinatnom sistemu,

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV$$

diferencira po zapremini V , onda je izvod desne strane jednak podintegralnoj funkciji, a izvod leve strane upravo predstavlja definiciju divergencije, pa je i to jedan od razloga što se ova podintegralna funkcija često pogrešno smatra definicijom divergencije.

Iz definicije divergencije je jasno da vrednost ove skalarne veličine uopšte ne zavisi od izbora koordinatnog sistema.

Treba primetiti da ako je

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 1,$$

na primer,

$$E_x = \frac{1}{3}x, \quad E_y = \frac{1}{3}y, \quad E_z = \frac{1}{3}z,$$

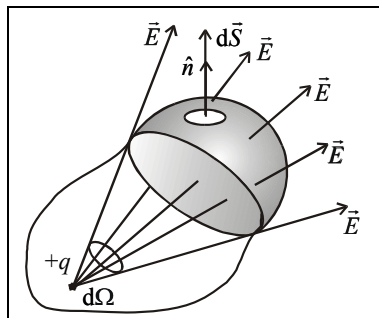
sledi korisna formula za izračunavanje zapremine,

$$V = \iiint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy.$$

5 - Gaussov zakon

Neka je S proizvoljna zatvorena površina koja obuhvata usamljeno tačkasto naelektrisanje q (naelektrisanja suprotnog znaka su dovoljno daleko da ne utiču na strukturu polja). Fluks vektora električnog polja kroz ovu površinu je

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\hat{r} d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}.$$



To što važi za tačkasto naelektrisanje važi i za bilo koju raspodelu naelektrisanja koja je zamišljenom (ili stvarnom) površinom obuhvaćena.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_L q' dl = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \eta dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{q}{\epsilon_0}$$

To je ustvari *Gaussov zakon* (*Carl Friedrich Gauss*, 1777-1855) u integralnom obliku.

$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

Izlazni fluks vektora električnog polja kroz proizvoljnu zatvorenu površinu jednak je količniku količine naelektrisanja koje je tom površinom obuhvaćeno i dielektrične konstante vakuuma.



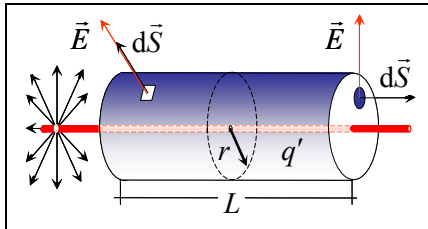
Ako se na *Gaussov zakon* primeni teorema divergencije dobija se lokalni ili diferencijalni oblik ovog zakona.

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \\ &\quad \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \\ \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{E} d\vec{S} &= \frac{1}{\epsilon_0} \lim_{V \rightarrow 0} \frac{q}{V} \end{aligned}$$

Do istog rezultata se dolazi i ako se integralni oblik *Gaussovog zakona* podeli zapreminom i potraži granična vrednost kad zapremina teži nuli tj. tački. *Gaussov zakon* je još jedan od razloga zbog koga je teorema divergencije ili teorema *Ostrogradskyog* najčešće poznata kao teorema *Gauss-Ostrogradskyog*.

Primer 5.1 - Naelektrisani cilindar i koaksijalni cilindri

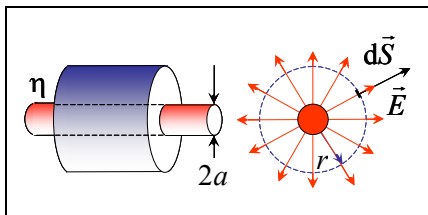
♦ Neograničeno duga nit naelektrisana je podužnom gustinom naelektrisanja q' . Oko dela ove niti opiše se zamišljena cilindrična površ poluprečnika r i konačne dužine L . Ova zamišljena površina naziva se *Gaussova površina*.



Vektor električnog polja ima samo radijalnu komponentu pa fluks postoji samo kroz omotač *Gaussove* površine. U svakoj tački na omotaču vektor električnog polja ima isti pravac, smer i jačinu, a kolinearan je sa vektorom elementa površine. Jasno, smer vektora električnog polja zavisi od znaka naelektrisanja.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \int_{S_{om}} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E 2\pi r L = \frac{q' L}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}}$$

♦ Ako je naelektrisanje rapoređeno na cilindru koji nije beskonačno tanak već ima kružni poprečni presek poluprečnika a , naelektrisanja će biti raspoređena po površini cilindra stvarajući površinsku gustinu naelektrisanja η .



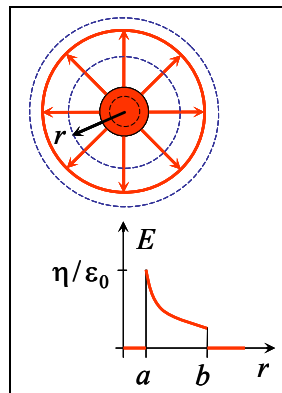
Gaussovom površinom u oba slučaja je obuhvaćena ista količina naelektrisanja.

$$q = q' L = \eta 2\pi r L \Rightarrow E 2\pi r L = \frac{\eta 2\pi a L}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\eta}{\epsilon_0} \frac{a}{r} \hat{r}}$$

Najveća jačina polja je na površini cilindra, $r = a$. Dobijeni rezultat je granični uslov za normalnu (u ovom slučaju i jedinu) komponentu vektora električnog polja.

$$\boxed{E_{\max} = \frac{\eta}{\epsilon_0}}$$

♦ Neka su data dva naelektrisana koaksijalna cilindra. Usled dejstva *Coulombovih* sila naelektrisanja su raspoređena po spoljašnjoj površini unutrašnjeg cilindra, $r = a$ i unutrašnjoj površini spoljašnjeg cilindra, $r = b$. Kada je $r < a$ *Gaussova* površina ne obuhvata naelektrisanja, te je u unutrašnjosti unutrašnjeg cilindra polje jednako nuli. Kada je $r > b$ *Gaussova* površina obuhvata jednake po količini i suprotne po znaku količine naelektrisanja, pa je opet polje jednako nuli. Između cilindra električno polje je jednako polju koje bi stvarao i usamljeni cilindar.



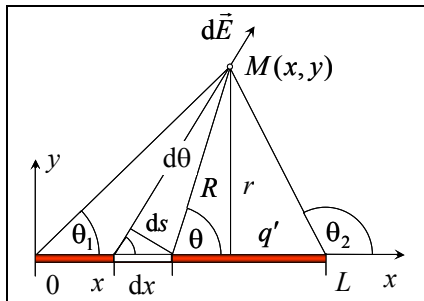
Primer 5.2 - Naelektrisana nit konačne dužine

Nit dužine L naelektrisana je podužnom gustinom naelektrisanja q' . Elementarni odsečak niti dužine dx se ponaša kao tačkasto naelektrisanje $dq = q'dx$, koje u tački $M(x, y)$ stvara električno polje

$$dE = \frac{q'dx}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Kad se iskoriste geometrijski odnosi koji su sa slike očigledni, za komponentu električnog polja koja je upravna na pravac niti se dobija izraz u kome figuriše isključivo ugao θ .

$$E_y = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \Rightarrow$$



$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{R}, & \sin \theta &= \frac{ds}{dx} \\ \sin \theta &= \frac{dE_y}{dE}, & dx &= \frac{R d\theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

$$E_y = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

♦ Kad je nit neograničeno duga, $\theta_1 \rightarrow 0$, $\theta_2 \rightarrow \pi$ za električno polje se dobija izraz koji bi se dobio i primenom *Gaussovog zakona* u integralnom obliku.

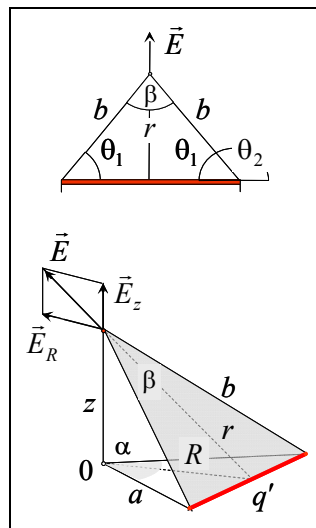
$$E = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

♦ Za tačke koje pripadaju simetralnoj ravni niti je $\theta_1 = (\pi - \beta)/2$ i $\theta_2 = (\pi + \beta)/2$, pa se izraz za električno polje može preurediti na oblik

$$E = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} \tan \frac{\beta}{2}.$$

♦ Pravilan N -tougao je upisan u kružnicu poluprečnika a tako da se stranica vidi po uglom $\alpha = 2\pi/N$. Na osi mnogougla električno polje ima samo aksijalnu komponentu koja se dobija direktnom primenom poslednje formule.

$$E_z = \frac{q'}{2\epsilon_0} \frac{az}{(z^2 + a^2 \cos^2(\pi/N))\sqrt{z^2 + a^2}} \frac{\sin(\pi/N)}{\pi/N}$$



♦ Kad se broj stranica mnogougla neograničeno uvećava, $N \rightarrow \infty$, dobija se izraz za električno polje na osi kružnice.

$$E_z = \frac{q'}{2\epsilon_0} \frac{az}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Primer 5.3 - Zapreminsko naelektrisanje između dva cilindra

Beskonačno dug cilindar poluprečnika a homogeno je naelektrisan zapreminskom gustinom naelektrisanja ρ . Kada se *Gaussov zakon* u integralnom obliku,

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

primeni na zamišljenu cilindričnu površinu konačne dužine L i poluprečnika $r \geq a$ postoji samo fluks kroz omotač cilindra, pa sledi

$$E 2\pi r L = \frac{\rho}{\epsilon_0} a^2 \pi L \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{a^2}{r} \hat{r}, \quad r \geq a.$$

Ako je pak $r \leq a$ sva naelektrisanja nisu obuhvaćena zamišljenom površinom, pa je

$$E 2\pi r L = \frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 \pi L \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \hat{r}, \quad r \leq a.$$

Neka je naelektrisana oblast ograničena sa dve cilindrične površine poluprečnika a, b , $a > b$ i neka je rastojanje između osa cilindra d . Kako će biti pokazano, polje u unutrašnjosti šupljine je homogeno. Posmatrani elektrostatički sistem je potrebno zameniti sa dve zapreminske gustine naelektrisanja suprotnih znakova i odgovarajućih poluprečnika cilindra koje ih obuhvataju.

U tački M koja pripada šupljini ukupno polje je zbir polja koja potiču od zapreminskih naelektrisanja suprotnih znakova.

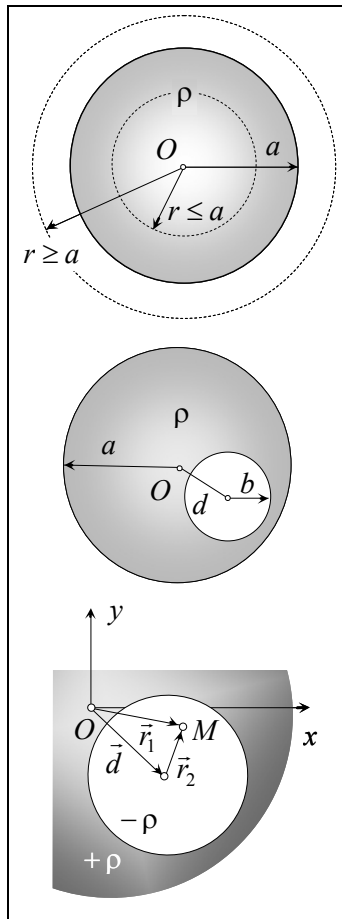
$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r}_1, \quad r_1 \leq a \quad \text{ i } \quad \vec{E}_2 = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r}_2, \quad r_2 \leq b,$$

pa je ukupno električno polje

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{d},$$

konstantne jačine i u pravcu koji spaja ose cilindra.

Zadatak 5.1 - Odrediti električno polje koje stvara neograničena ravan naelektrisana površinskom gustinom naelektrisanja η . Odrediti električno polje između dve ravni, između dva koaksijalna cilindra i između dve sfere.

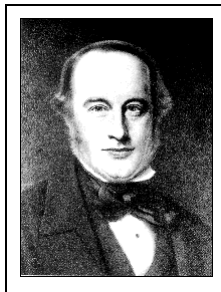


6 - Rad sila polja i energija

U fizici mehanički rad za razliku od intelektualnog rada je obavezno povezan sa dejstvom neke sile. Sila svojim dejstvom vrši rad samo ako se to telo pomera ili deformiše, u suprotnom rad ne postoji iako postoji dejstvo sile.

Elementarni rad je definisan kao skalarni proizvod sile $\vec{F}$ i vektora pomeraja, $d\vec{l}$. Jačina vektora pomeraja je jednaka dužini pređenog puta, pravac i smer su isti kao pravac i smer pomeranja tela ili deformacije. Jedinica za rad je Džul (Joule), sa oznakom J, (*James Joule*, 1818-1890).

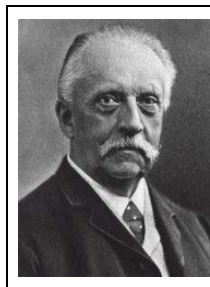
$$A = \int_L \vec{F}(\vec{r}) d\vec{l} \quad [A] = \text{J} = \text{N m} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$



Energija je brojno jednaka radu i ima istu jedinicu. Međutim, i pored istog mernog broja i iste jedinice između rada i energije postoji kvalitativna razlika. Energija određuje sposobnost nekog sistema da izvrši rad. Rad je veličina koja određuje promenu energije. Ako na sistem deluju spoljašnje sile energija tog sistema se povećava. Obrnuto, sistem može da izvrši rad samo smanjivanjem (trošenjem) svoje energije. Posmatrano mikroskopski postoje samo dve vrste energije i to su potencijalna i kinetička energija ili energije mirovanja i kretanja. Sve makroskopske vidove energije (električna, toplotna, ...) moguće je svesti na dva mikroskopska, čiji zbir podleže zakonu o održanju energije.

Helmholtz (Hermann von Helmholtz 1821-1894) je zapisao : "... Priroda kao celina ima zalihu energije koja se nikako ne može ni povećati ni smanjiti, dakle, količina energija u neorganskoj prirodi ... je večna i nepromenljiva."

Zakon o održanju energije: Ukupna energija izolovanog sistema je nepromenljiva. Ukupnu energiju nije moguće uništiti niti je iz bilo čega stvoriti. Moguće je jedino pretvaranje jednog vida energije u drugi.



Rad sila električnog porekla po zatvorenom putu je jednak nuli. Cirkulacija vektora električnog polja je jednaka nuli. Elektrostatičko polje je konzervativno.

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) d\vec{l} = 0$$

To je direktna posledica zakona o održanju energije. Direktne posledice su i da je električno polje u unutrašnjosti provodnika jednako nuli i da postoji samo normalna komponenta na spoljašnjoj strani provodnika. Naelektrisanja se raspoređuju krećući se po najkraćim putanjama koje su određene najvećim privlačnim ili odbojnim silama. Tada je utrošeni rad najmanji, pa je elektrostatički sistem u ravnoteži ako je potencijalna energija polja minimalna. Elektrostatičko polje opisuje se energijom mirovanja.

Primer 6 - Rad Coulombove sile

Dva nepokretna tačkasta naelektrisanja jednaka po znaku i količini nalaze se na međusobnom rastojanju $2a$. Na vertikalnoj osi simetrije u tački M na visini y nalazi se tačkasto naelektrisanje isto po količini ali suprotnog znaka. Potrebno je izračunati rad koji izvrše sile polja pomerajući ovo naelektrisanje iz tačke gde je sila najveća do tačke u kojoj se naelektrisanje nalazi u stanju labilne ravnoteže. Privlačna Coulombova sila međusobnog dejstva ima samo komponentu upravnu na pravac koji spaja dva nepokretna tačkasta naelektrisanja,

$$\vec{F}(y) = -\frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(y^2 + a^2)^{3/2}} \hat{y} = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} f(y) \hat{y},$$

Osim u centru simetrije, $y = 0$, gde se tačkasto naelektrisanje nalazi u stanju labilne ravnoteže, sila na tačkasto naelektrisanje je jednaka nuli i u beskonačnosti. Između dve nule neprekidne funkcije mora da postoji ekstremna vrednost (Rolleova teorema). Najveća privlačna sila je u tački gde je prvi izvod funkcije $f(y)$ jednak nuli. Dakle, u opštem slučaju Coulombova sila nije najveća pri najmanjem rastojanju. Kako je

$$f'(y) = \frac{a^2 - 2y^2}{(a^2 + y^2)^{5/2}}, \text{ to sledi da je najveća sila u tačkama } y = \pm a \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Traženi rad je

$$A = \int_{a\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \vec{F}(y) d\vec{y} = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \int_{a\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \frac{y dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} (1 - \sqrt{2/3}).$$

Zadatak 6.1 - Nepokretni kružni obruč poluprečnika a naelektrisan je količinom naelektrisanja q . Na osi obruča na rastojanju y od centra nalazi se tačkasto naelektrisanje isto po količini suprotno po znaku. Izračunati rad koji izvrše sile polja pomerajući tačkasto naelektrisanje iz tačke gde je sila najveća do centra obruča.

Zadatak 6.2 - Jezgro atoma vodonika polazi iz beskonačnosti početnom brzinom v ka nepokretnom tačkastom naelektrisanju q . Izjednačavajući kinetičku energiju čestice i rad izvršen protiv sila polja odrediti rastojanje na kom će se čestica zaustaviti.

Zadatak 6.3 - Dve paralelne ravni na međusobnom rastojanju d naelektrisane su istim površinskim gustinama naelektrisanja koje su suprotne po znaku $\pm\eta$. Sa negativno naelektrisane ravni iz stanja mirovanja kreće elektron. Izračunati brzinu elektrona neposredno pre udara u pozitivno naelektrisanu ravan.

Zadatak 6.4 - Tačkasto naelektrisanje q kreće se po liniji polja ravni naelektrisane nepoznatom površinskom gustinom naelektrisanja η . Ako je poznata dužina pređenog puta s i ukupan izvršeni rad A , izračunati površinsku gustinu naelektrisanja ravni η .

7 - O izračunavanju rada i energije

U *Descartesovom* (*Rene Descartes* alias *Cartesius Renatus*, 1596 -1650) koordinatnom sistemu je

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} \quad \vec{F}(\vec{r}) = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} \quad d\vec{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y},$$

pa se za rad sila polja između tačaka A i B dobija krivolinijski integral druge vrste,

$$A = \int_C \vec{F} d\vec{l} = \int_{AB} F_x dx + F_y dy = - \int_{BA} F_x dx + F_y dy.$$

Promena znaka je u potpunoj saglasnosti sa fizičkim tumačenjem - to je rad koji može biti i pozitivan i negativan tj. dobijen i uložen.

Kako je $dx = \cos \alpha dl$, $dy = \sin \alpha dl$ to je

$$A = \int_{AB} (F_x \cos \alpha + F_y \sin \alpha) dl = \int_{AB} F(\vec{r}) dl = \int_{AB} F(x, y) dl,$$

što je krivolinijski integral prve vrste.

Ako je C proizvoljna zatvorena kontura koja ograničava površinu S , tada se elementarnim razmatranjem pokazuje da je

$$\oint_C F_x dx + F_y dy = \iint_S \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy$$

što je poznato kao *Greenova formula* (*George Green*, 1793-1841).

U elektrostatičkom polju (kao i u gravitacionom) rad sila po zatvorenoj konturi je jednak nuli. To znači da rad ne zavisi od putanje integracije već samo od koordinata početne i krajnje tačke. Na primer, za konturu sa slike će biti

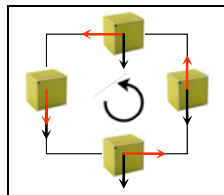
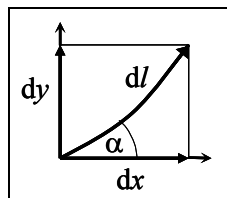
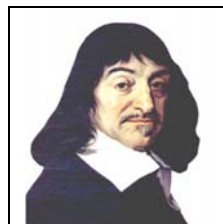
$$A = FL \cos 0 + FL \cos \pi/2 + FL \cos \pi + FL \cos 3\pi/2 = 0.$$

Ako je samo jedan od uslova ispunjen, tada su ispunjeni i ostali (ovde bez dokaza).

$A = \oint_C F_x dx + F_y dy = 0$	$d\varphi = F_x dx + F_y dy$
$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$	$A = \int_{AB} d\varphi = \varphi(A) - \varphi(B)$

Iz *Greenove* formule se pogodnim izborom podintegralne funkcije dobija korisna formula za izračunavanje površine:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= -y\hat{x} + x\hat{y} \\ d\vec{l} &= dx\hat{x} + dy\hat{y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \oint_C x dy - y dx = 2 \int_S dx dy \Rightarrow \bar{S} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times d\vec{l}$$

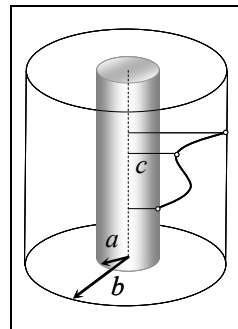


Primer 7 - Izračunavanje rada u električnom polju

U prostoru između elektroda cilindričnog voda poluprečnika elektroda a i b respektivno, nalazi se tačkasto naelektrisanje q . Izračunati rastojanje c za koje je rad sila električnog polja od a do c isti kao od c do b .

Električno polje u koaksijalnom vodu je radijalno i dobija se primenom *Gaussovog* zakona

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E 2\pi r l = \frac{q' l}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r}.$$



Komponente električnog polja u *Descartesovom* koordinatnom sistemu su

$$\vec{E} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{x^2 + y^2} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y},$$

pa sledi da je rad

$$A = q \int_C (E_x dx + E_y dy) = \frac{q q'}{2\pi\epsilon_0} \int_C \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}.$$

Za rešavanje integrala je potrebno poznavati jednačinu putanje duž koje se integri. Integral se jednostavno rešava smenama $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Međutim, kao što je poznato elektrostatičko polje je konzervativno i lako se proverava da rad ne zavisi od putanje integracije već samo od koordinata krajnjih tačaka.

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial y} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{x-y}{x^2 + y^2} \right)^2 \end{aligned} \right.$$

Pošto je ispunjen jedan od potrebnih uslova ispunjeni su i svi ostali, pa se rad izračunava kao integral totalnog diferencijala potencijala. Za dve proizvoljne tačke koje su određene poluprečnicima $r_A < r_B$ rad (napon) će biti

$$A_{ab} = \int_A^B \vec{F} d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \frac{q q'}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r} = \frac{q q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_B}{r_A}.$$

Rad od tačke na spoljašnjoj strani unutrašnje elektrode $r = a$ do tačke u polju $r = c$ je:

$$\blacktriangleright A_{AC} = \frac{q q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{c}{a}$$

Rad od tačke u polju $r = c$ do tačke na unutrašnjoj strani spoljašnje elektrode $r = b$ je:

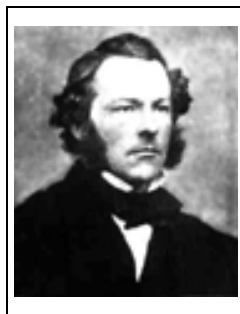
$$\blacktriangleright A_{CB} = \frac{q q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{c}$$

Iz jednakosti ova dva izraza sledi:

$$\blacktriangleright c = \sqrt{ab}$$

8 - Stokesova formula, rotor vektora

Uopštavanje *Greenove* formule na trodimenzionalni slučaj dovodi do *Stokesove* formule (*George Gabriel Stokes*, 1819-1903). U elektrostatičkom polju rad po zatvorenoj putanji je jednak nuli pa slede izrazi analogni onima koji se dobijaju u dvodimenzionalnom slučaju.



Rad u ravni	Rad u prostoru
$A = \oint_C F_x dx + F_y dy$	$A = \oint_C F_x dx + F_y dy + F_z dz$

$$A = \iint_S \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy + \iint_S \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} \right) dy dz + \iint_S \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) dx dz.$$

Stokesova formula dovodi do ideje da je integral na desnoj moguće interpretirati kao fluks nekog novog vektora kroz površinu S koja je ograničena konturom C .

Taj novi vektor nazvan je rotacija ili vrtložnost vektorskog polja ili rotor vektora. U *Descartesovom* koordinatnom sistemu ovaj vektor je moguće zapisati u formi simboličke determinante.

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Stokesova formula (teorema): Cirkulacija vektora $\vec{F}$ duž zatvorene konture C je jednaka fluksu vektora $\text{rot } \vec{F}$ kroz proizvoljnu površinu S koja se oslanja na konturu.

$$\oint_C \vec{F} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{F} d\vec{S}$$

Elektrostatičko polje je bezvrtložno jer je rad sila polja po zatvorenom putu jednak nuli,

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

Međutim, u opštem slučaju (na primer, magnetno polje) cirkulacija vektora nije jednaka nuli.

Ako se elementarna kontura, ΔC , po kojoj se računa cirkulacija, steže (obim teži nuli) onda i površina, ΔS , koja je ograničena konturom teži nuli i obe strane u izrazu za cirkulaciju vektora teže nuli. Međutim, ako se obe strane ove jednakosti podele sa ΔS , tada je granična vrednost konačna i definiše projekciju vektora $\text{rot } \vec{F}$ na pravac normale elementarne površine ΔS . Rotor vektora je prostorni izvod i ne zavisi od izbora koordinatnog sistema.

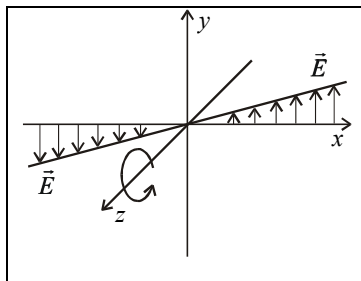
$$\oint_{\Delta C} \vec{F} d\vec{l} = \text{rot } \vec{F} \Delta \vec{S} = \hat{n} \text{rot } \vec{F} \Delta S \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} d\vec{l} = \hat{n} \text{rot } \vec{F}.$$

Primer 8 - Elektrostatičko polje koje ne može da postoji

Neka se elektrostatičko polje menja po zakonu

$\vec{E} = kx \hat{y}$, $k = \text{Const}$. Kako je

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = k \hat{z} \neq 0,$$



to znači da postojanje ovakvog elektrostatičkog polja nije moguće jer je rezultat suprotan činjenici da je elektrostatičko polje konzervativno, tj. da je $\text{rot } \vec{E} = 0$.

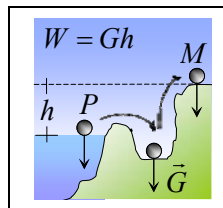
Zadatak 8.1 - Odrediti rotor vektora položaja, $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$.

Zadatak 8.2 - Odrediti rotor vektora $\frac{\hat{r}}{r^2}$.

Zadatak 8.3 - Izračunati $\text{rot}(\text{grad } \phi)$.

9 - Energija, potencijal i napon

U gravitacionom polju potencijalna energija tela se određuje u odnosu na neki referentni nivo. Za referentni nivo izabran je nivo mora. Potencijalna energija je zbir energije na referentnom nivou i rada koji je uložen na podizanje tela. Time se ukupna energija sistema povećava, a oblik i dužina putanje nisu od značaja.



Uloženi rad treba uzeti sa negativnim znakom jer se vrši protiv sile polja. Vrednost integrala je negativna, jer su vektori sile i puta antiparalelni, i zbir je pozitivan.

$$A_M = A_P - \int_P^M \vec{F} d\vec{l}$$

Dakle, potencijalna energija nije jednoznačno određena i zavisi od izbora referentnog nivoa. Energije računane za različite referentne nivoe se razlikuju za aditivnu konstantu.

Ako se usvoji da je rad koji je prethodno uložen da bi se telo dovelo do referentnog nivoa jednak nuli, ili ako se smatra da je površina mora na nultoj visini, tada je prvi sabirak jednak nuli pa se za potencijalnu energiju dobija poznat izraz.

$$A_M = \int_M^P \vec{F} d\vec{l}$$

$$\frac{1}{q_0} A_M = \int_M^P \vec{E} d\vec{l}$$

$$A = \varphi q$$

Potpuno ista razmatranja važe za elektrostatičko polje, samo što se u elektrostatičkom polju ne pomera masa već probno naelektrisanje. Referentna tačka je najčešće u beskonačnosti.

Potencijal neke tačke u elektrostatičkom polju je brojno jednak radu koji izvrše sile polja pomerajući pozitivno jedinično naelektrisanje iz te tačke do referentne tačke. Elektrostatičko polje je potencijalno polje.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_r^{r_p} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{l}$$

Jedinica za potencijal je volt sa oznakom V (*Alessandro Volta*, 1745-1827). Oдавде sledi i jedinica za električno polje koja se u praksi najčešće i koristi,



$$[\varphi] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{J}{C} = \frac{Nm}{C} = V, \quad \frac{N}{C} = \frac{V}{m}.$$

Razlika potencijala je srazmerna razlici potencijalnih energija i to je električni napon, ili samo napon.

$$U_{MN} = \int_{r_M}^{r_N} \vec{E} d\vec{l}$$

Tačke na istom potencijalu obrazuju ekvipotencijalne linije i ekvipotencijalne površine. Pošto je napon između dve tačke koje pripadaju istoj ekvipotencijalnoj površini jednak nuli, na osnovu definicije napona, sledi da je vektor električnog polja uvek normalan na ekvipotencijalnu površinu. U unutrašnjosti provodnika električno polje je jednako nuli, što znači da su sve tačke na istom potencijalu koji je jednak potencijalu površine.

Primer 9 - Održanje količine naelektrisanja

Balon (na primer, od sapunice) poluprečnika a i male debljine zida $\Delta a \ll a$, u odnosu na referentnu tačku nalazi se na potencijalu φ_a . Nakon rasprskavanja balon se pretvara u kapljicu sfernog oblika poluprečnika b koja će sadržati istu količinu naelektrisanja, q , kao i balon ali će biti na nekom drugom potencijalu φ_b . Kako je

$$\varphi_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \quad \text{i} \quad \varphi_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} \quad \text{to sledi,} \quad \varphi_b = \varphi_a \frac{a}{b}.$$

Pošto zapremina koju zauzima materijal balona mora biti ista kao i zapremina koju zauzima materijal kapljice to je

$$\frac{4}{3}\pi(a^3 - (a - \Delta a)^3) = \frac{4}{3}\pi b^3,$$

odakle je moguće izračunati poluprečnik novonastale kapljice,

$$b = (3a^2\Delta a - 3a\Delta a^2 + \Delta a^3)^{1/3}.$$

Kad se zanemare stepeni višeg reda male veličine Δa za potencijal kapljice se dobija

$$\varphi_b = \varphi_a \frac{a}{(3a^2\Delta a)^{1/3}}.$$

Zadatak 9.1 - Dve provodne sfere čiji su poluprečnici $a < b$ povezane su provodnikom zanemarljive debljine čija je dužina znatno veća od oba poluprečnika, $R \gg a, b$. Ako je ceo sistem naelektrisan količinom naelektrisanja $q = q_a + q_b$ odrediti silu istezanja provodnika na kome je količina naelektrisanja zanemarljiva

Zadatak 9.2 - Odrediti potencijal koji stvara nit dužine L koja je ravnomerno naelektrisana podužnom gustinom naelektrisanja q' . Potencijal odrediti u tački u ravni simetrije.

Zadatak 9.3 - Podužno naelektrisanje q' ima oblik polukružnice poluprečnika a . Odrediti potencijal tačke u centru.

Zadatak 9.4 - Kružna ploča poluprečnika a ravnomerno je naelektrisana površinskom gustinom naelektrisanja η . Odrediti potencijal u tačkama koje pripadaju vertikalnoj osi ploče.

Zadatak 9.5 - $2N$ jednakih po količini tačkastih naelektrisanja pravilno je raspoređeno po obimu zamišljene kružnice poluprečnika a . Odrediti potencijal u centru kružnice

- ako su naelektrisanja istog znaka,
- ako se znak naelektrisanja naizmenično menja.

10 - Gradijent potencijala

Potencijal je definisan kao krivolinijski integral vektora električnog polja. Obrnuto, električno polje je izvod funkcije koja opisuje potencijal. Kako je izvod konstante jednak nuli, sledi da su funkcije φ_1 i $\varphi_2 = \varphi_1 + C$ potpuno ravnopravne jer jednoznačno opisuju električno polje.

Potencijal tačkastog naelektrisanja u tački M u odnosu na referentnu tačku P je

$$\varphi = \int_M^P \vec{E} d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{r_p} \frac{\hat{r} d\vec{l}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{r_p} \frac{dr}{r^2}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p} \right)$$

Ekvipotencijalne površine su koncentrične sfere u čijem se zajedničkom centru nalazi tačkasto naelektrisanje.

Za referentnu tačku u beskonačnosti, $r_p \rightarrow \infty$, nulta ekvipotencijala je sfera beskonačnog poluprečnika. Međutim, pri električnim merenjima najčešće se smatra da je površina zemlje na nultom potencijalu. Za tačke M i N koje su na beskonačno malom rastojanju je

$$\varphi_N = \varphi_M + d\varphi, \quad d\varphi = \varphi_N - \varphi_M = -\vec{E} d\vec{l}$$

U *Descartesovom* koordinatnom sistemu je

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}, \quad d\vec{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}, \quad d\varphi = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz, \quad \vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z} \right), \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

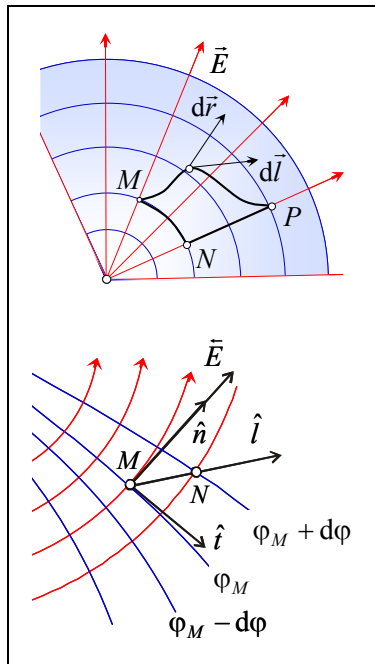
Kako je $d\varphi$ totalni diferencijal skalarne funkcije od tri promenljive, sledi:

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{d\varphi}{dn} \cos(\hat{n}, \vec{l}) = \frac{d\varphi}{dn} \hat{n} \hat{l} = \text{grad } \varphi \hat{l}$$

Električno polje je degradient električnog skalar potencijala.

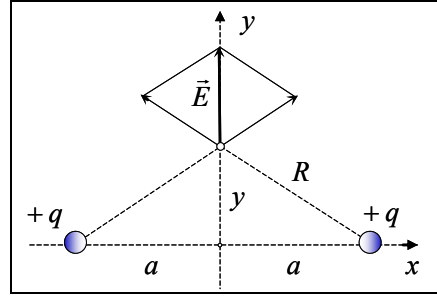
$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \hat{n}$$

Brzina promene skalarne veličine duž pravca zavisi od tog pravca. Najveća brzina promene je u pravcu koji je normalan na ekviskalaru površinu i jednaka nuli kad je taj pravac neka od tangenti na ekviskalaru površinu. Gradijent skalarne funkcije je prostorni izvod.



Primer 10 - Određivanje polja iz potencijala

Dva jednaka tačkasta naelektrisanja $+q$ nalaze se na međusobnom rastojanju $2a$. Potrebno je odrediti električno polje u tačkama koje pripadaju osi simetrije, y . Potencijal u bilo kojoj tački $M(0, y)$ je zbir potencijala koje stvara svako od tačkastih naelektrisanja,



$$\varphi(y) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a^2 + y^2)^{1/2}}.$$

Električno polje je jednako degradijentu potencijala,

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z} \right).$$

Pošto je potencijal funkcija koja zavisi samo od jedne koordinate y , to sledi

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{y} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \hat{y}.$$

Obrnuto, električni skalar potencijal iz električnog polja se dobija kao

$$\varphi = \int_y^\infty \vec{E} d\vec{y} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int_y^\infty \frac{y dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a^2 + y^2)^{1/2}} \Big|_y^\infty = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a^2 + y^2)^{1/2}}$$

Zadatak 10.1 Ako je $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ izračunati $\text{grad } R$ u tačkama $M(x, y, z)$ i $M'(x', y', z')$.

Zadatak 10.2 Ako je $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ izračunati $\text{grad } \frac{1}{R}$ u tačkama $M(x, y, z)$ i $M'(x', y', z')$.

11 - Helmholtz, Poisson i Laplace

Električni skalar potencijal nije jednoznačno određen jer zavisi od izbora referentne tačke. Međutim, električno polje, kao izvod potencijala, i pored toga je jednoznačno.

Prema *Helmholtzovoj* teoremi vektorska funkcija je jednoznačno određena ako njena vrednost u beskonačnosti teži nuli najmanje kao $1/r^2$ i ako su u svim tačkama iz oblasti definisanosti poznati prostorni izvodi.

Elektrostatičko polje je jednoznačno određeno jer su ispunjeni svi uslovi teoreme koja je ovde prikazana bez dokaza.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0, n > 1$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Diferencijalni oblik *Gaussovog* zakona i činjenica da je električno polje određeno kao degradijent potencijala dovode do parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda koje su poznate kao *Poissonova* (*Denis Poisson*, 1781-1847) i *Laplaceova* (*Pierre Simon Laplace* 1749-1827), za $\rho \neq 0$ i $\rho = 0$ respektivno.

	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\vec{E} = -\text{grad } \phi$	
	$\text{div}(\text{grad } \phi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{div}(\text{grad } \phi) = 0$	

Izraz $\text{div}(\text{grad } \phi)$ je prostorni izvod drugog reda i nazivan je *laplasien* skalarne funkcije ϕ . Diferenciranja drugog reda primenjuju se prema tabeli koja sledi.

Operator	skalarno polje ϕ	vektorsko polje $\vec{E}$	
	grad	div	rot
grad		$\text{grad}(\text{div } \vec{E})$	
div	$\text{div}(\text{grad } \phi)$		$\text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0$
rot	$\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0$		$\text{rot}(\text{rot } \vec{E})$

12 - Greenovi identiteti

Za proizvoljnu vektorsku funkciju $\vec{E}$ koja je zajedno sa svojim prvim izvodima neprekidna u delu prostora V koji je ograničen zatvorenom površinom S važi teorema divergencije ili teorema *Ostrogradskyog*.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV$$

Neka su ψ i ϕ skalarne funkcije čiji su prvi i drugi izvodi neprekidni u posmatranoj oblasti i neka je

$$\vec{E} = \psi \operatorname{grad} \phi,$$

tada iz teoreme divergencije sledi identitet

$$\oint_S \psi \operatorname{grad} \phi d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} (\psi \operatorname{grad} \phi) dV.$$

Kako je

$$\operatorname{div} (\psi \operatorname{grad} \phi) = \operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \phi + \psi \operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi)$$

sledi prvi *Greenov* identitet

$$\oint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \oint_S \psi \operatorname{grad} \phi d\vec{S} = \int_V (\operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \phi + \psi \operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi)) dV$$

Ako funkcije ψ i ϕ zamene mesta dobija se

$$\oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \oint_S \phi \operatorname{grad} \psi d\vec{S} = \int_V (\operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{div} (\operatorname{grad} \psi)) dV.$$

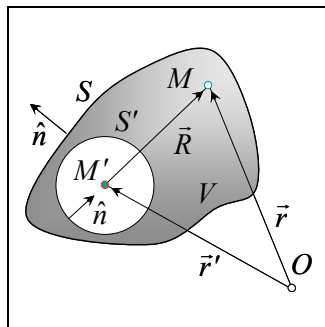
Oduzimanjem poslednja dva identiteta dobija se drugi *Greenov* identitet, poznatiji kao *Greenova* teorema ili teorema *Green-Ostrogradskyog*.

$$\oint_S (\psi \operatorname{grad} \phi - \phi \operatorname{grad} \psi) d\vec{S} = \int_V (\psi \operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi) - \phi \operatorname{div} (\operatorname{grad} \psi)) dV$$

$$\oint_S \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS = \int_V (\psi \operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi) - \phi \operatorname{div} (\operatorname{grad} \psi)) dV$$

13 - Rešenje Laplaceove i Poissonove jednačine

Svaka funkcija koja je u datoj oblasti neprekidna i koja ima neprekidne izvode prvog i drugog reda i koja zadovoljava Laplaceovu jednačinu je harmonijska funkcija. Električni skalar potencijal je harmonijska funkcija. Ako je $\vec{r}'$ vektor položaja tačke izvora i $\vec{r}$ vektor položaja tačke u polju, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, tada funkcija $\psi = 1/R$ zadovoljava Laplaceovu jednačinu u svim tačkama osim u tački izvora, $\vec{r} = \vec{r}'$. Dokaz je jednostavan:



$$\operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \frac{1}{R} \right) = \operatorname{div} \left(-\frac{\vec{R}}{R^3} \right) = -\frac{1}{R^3} \operatorname{div} \vec{R} - \vec{R} \operatorname{grad} \frac{1}{R^3} = -3 \frac{1}{R^3} + 3 \frac{\vec{R}\vec{R}}{R^5} = 0.$$

Neka je funkcija ϕ električni skalar potencijal koji zadovoljava Poissonovu jednačinu i ψ funkcija koja zadovoljava Laplaceovu jednačinu i uslove pod kojima su izvedeni Greenovi identiteti, u svim tačkama osim u tački $R=0$ koju je potrebno isključiti iz dela zapremine, na primer sfernom površinom S' poluprečnika a . Opšte rešenje Poissonove jednačine sledi iz Greenove teoreme.

$$\oint_{S+S'} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS = \int_V \left(\underbrace{\psi \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi)}_{-\rho/\epsilon_0} - \underbrace{\phi \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi)}_0 \right) dV$$

$$\Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow$$

$$\oint_{S+S'} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right) dS = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{R} dV$$

Neka se površina S uvećava, na primer kao sfera, po zakonu R^2 . Podintegralna funkcija istovremeno opada bar kao $1/R^3$ tako da integral po ovoj površini iščezava.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_S \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right) dS = 0$$

Na površini sfere S' je $R=a$ i $\partial/\partial n = -\partial/\partial R$, jer je normala na tu površinu usmerena ka centru sfere. Ako se za potencijal i izvod potencijala u pravcu radijusa usvoje srednje vrednosti, ceo izraz ide ispred znaka integrala, pa sledi

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{S'} \left(-\frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial R} - \frac{1}{a^2} \phi \right) dS = -\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{1}{a^2} \phi \right) 4\pi a^2 = -4\pi \phi$$

Konačno rešenje Poissonove jednačine je na osnovu Helmholtzove teoreme jednoznačno.

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dV$$

14 - Provodnici

Kad se provodno telo naelektriše, usled dejstva odbojnih elektrostatičkih sila dolazi do raspoređivanja naelektrisanja po površini tela. U unutrašnjosti provodnika nema slobodnih naelektrisanja i električno polje je jednako nuli. Zato je svedeno da li je provodnik masivan ili šupalj. Šuplje provodno telo, za unutrašnjost, predstavlja savršenu zaštitu od spoljašnjeg elektrostatičkog polja.

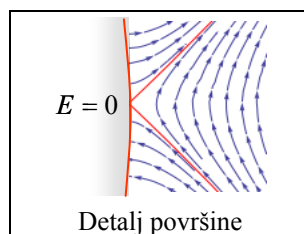
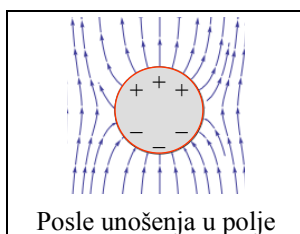
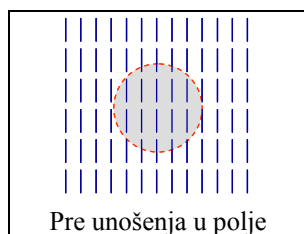
Na površini provodnika tangencijalna komponenta električnog polja je jednaka nuli. U suprotnom bi bilo stalnog kretanja naelektrisanja i nikada ne bila postignuta ravnoteža. Normalna komponenta električnog polja je jednaka količniku površinske gustine naelektrisanja i dielektrične konstante. Sve tačke na površini provodnika su na istom potencijalu. To je ekvipotencijalna površina.

$$E_t = |\vec{E} \times \hat{n}| = 0$$

$$E_n = \vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{\eta}{\epsilon_0}$$

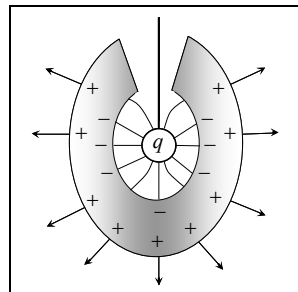
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\eta}{r} dS$$

Kad se provodnik unese u elektrostatičko polje pod dejstvom polja dolazi do kratkotrajnog kretanja elektrona u provodniku koje traje sve do uspostavljanja novog ravnotežnog stanja. Naelektrisanja će biti raspoređena tako da uslovi elektrostatičke ravnoteže budu obezbeđeni. Nova raspodela naelektrisanja na provodniku koji je unet u elektrostatičko polje je nazvana elektrostatička indukcija ili influencija.



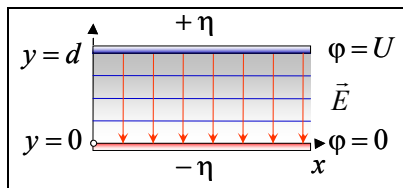
Ako se naelektrisano telo unese u unutrašnjost šupljeg provodnog nenaelektrisanog tela na unutrašnjoj površini šupljeg tela će se pojaviti naelektrisanja suprotnog znaka koja će biti raspoređena tako da budu ispunjeni uslovi elektrostatičke ravnoteže.

Pošto je šuplje telo prethodno bilo nenaelektrisano na spoljašnjoj površini će biti raspoređena naelektrisanja jednaka po znaku i količini onom koje je u telo uneto i to bez obzira na oblike i međusobni položaj tela. Ovakav eksperiment je izveo Faraday pa je pojava naelektrisanja na spoljašnjoj površini nenaelektrisanog tela koje obuhvata neku količinu naelektrisanja poznata kao efekat Faradayevog pehara.



Primer 14.1 - Dve paralelne ravni

Dve neograničene ravni na rastojanju d priključene su na napon U . Raspodela potencijala određena je rešenjem *Laplaceove* jednačine koje zadovoljava granične uslove na površinama ravni.



U *Descartesovom* koordinatnom sistemu potencijal zavisi samo od jedne koordinate, na primer y , pa *Laplaceova* jednačina ima samo jedan sabirak.

$$\blacktriangleright \frac{d^2\phi}{dy^2} = 0$$

Rešenje je linearna funkcija od y koordinate.

$$\blacktriangleright \phi(y) = C_1 y + C_2$$

Iz graničnog uslova $\phi(y=0)=0$ se dobija

$$\blacktriangleright C_2 = 0$$

Iz graničnog uslova $\phi(y=d)=U$ se dobija

$$\blacktriangleright C_1 = \frac{U}{d}$$

Konačno rešenje je

$$\blacktriangleright \phi = U \frac{y}{d}$$

Električno polje je degradijent potencijala i usmereno je od ravni na višem potencijalu ka ravni na nižem potencijalu.

$$\blacktriangleright \vec{E} = -\frac{d\phi}{dy} \hat{y} = -\frac{U}{d} \hat{y}$$

$$E = \frac{U}{d}$$

Ako su ravni konačnih dimenzija i imaju površinu S onda iz *Gaussovog* zakona sledi izraz za jačinu električnog polja.

$$\blacktriangleright E = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

Poređenjem poslednja dva izraza se dobija

$$\blacktriangleright \frac{U}{d} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

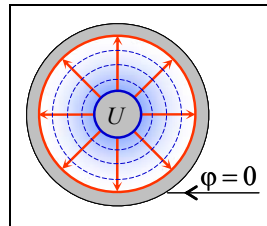
Oдавde sledi odnos q/U koji je za dati sistem konstantan. Kasnije će biti pokazano da je taj odnos kapacitivnost, u ovom slučaju ravnog kondenzatora.

$$\blacktriangleright \frac{q}{U} = \epsilon_0 \frac{S}{d} = \text{Const.}$$

Primer 14.2 - Koaksijalni vod

Dva neograničeno duga koaksijalna cilindra poluprečnika a i b priključena su na napon U . Raspodela potencijala određena je rešenjem Laplaceove jednačine koje zadovoljava granične uslove na elektrodama.

$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi(a) = U \quad \text{ i } \quad \varphi(b) = 0.$$



U polarno-cilindričnom koordinatnom sistemu (videti prilog) potencijal zavisi samo od radialne koordinate r , pa Laplaceova jednačina ima samo jedan sabirak. Izraz u zagradi mora da bude jednak konstanti, pa se posle integracije dobija opšte rešenje.

Zadovoljavanjem graničnih uslova se dobija sistem od dve linearne jednačine iz koji se određuju konstante integracije.

Zamenom vrednosti za konstante u opšte rešenje dobija se izraz za raspodelu potencijala.

Električno polje je određeno kao negativan izvod potencijala u pravcu normale,

Izraz za električno polje se dobija i direktnom primenom Gaussovog zakona u integralnom obliku.

Odavde je potencijal određen kao linijski integral vektora električnog polja.

Napon između elektroda se dobija kada je rastojanje jednako poluprečniku spoljašnje elektrode.

Odnos q'/U je za dati sistem konstantan. Kasnije će biti pokazano da je taj odnos podužna kapacitivnost.

Najveća jačina električnog polja je na spoljašnjoj strani unutrašnje elektrode.

Poluprečnik unutrašnjeg provodnika je moguće dimenzionisati tako da ta vrednost bude najmanja.

Iz nule prvog izvoda se dobija uslov za minimum maksimuma jačine električnog polja.

Tako se dobija i najmanja moguća vrednost jačine električnog polja u koaksijalnom vodu za zadati napon.

Za $r < a$ i $r > b$ polje je jednako nuli, što se lako vidi iz Gaussovog zakona.

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

$$\varphi(r) = C_1 \ln r + C_2$$

$$U = C_1 \ln a + C_2$$

$$0 = C_1 \ln b + C_2$$

$$\varphi = -U \frac{\ln(r/b)}{\ln(b/a)}$$

$$\vec{E} = \frac{U}{\ln(b/a)} \frac{\hat{r}}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

$$\varphi = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{a}$$

$$U = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

$$C' = \frac{q'}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}$$

$$E_{\max} = \frac{U}{\ln(b/a)} \frac{1}{a}$$

$$\frac{dE_{\max}}{da} = 0$$

$$b/a = e$$

$$E_{\max_{\min}} = e \frac{U}{b} = \frac{U}{a}$$

Primer 14.3 - Koncentrične sfere

Dve koncentrične sfere priključene su na napon U . Raspodela potencijala određena je rešenjem *Laplaceove* jednačine koje zadovoljava granične uslove na elektrodama, $\Delta\varphi = 0$, $\varphi(a) = U$ i $\varphi(b) = 0$.

U sfernom koordinatnom sistemu (videti prilog) potencijal zavisi samo od radialne koordinate r , pa *Laplaceova* jednačina ima samo jedan sabirak.

Izraz u zagradi mora da bude jednak konstanti, pa se posle integracije dobija opšte rešenje.

Zadovoljavanjem graničnih uslova se dobija sistem od dve linearne jednačine čijim rešenjem su određene konstante integracije.

Zamenom vrednosti za konstante u opšte rešenje dobija se izraz za raspodelu potencijala.

Električno polje je određeno kao negativan izvod potencijala u pravcu normale,

Izraz za električno polje se dobija i direktnom primenom *Gaussovog* zakona u integralnom obliku.

Odavde je napon između sfere određen kao linijski integral vektora električnog polja.

Odnos q/U je za dati sistem konstantan. Kasnije će biti pokazano da je taj odnos kapacitivnost.

Najveća jačina električnog polja je na spoljašnjoj strani unutrašnje elektrode.

Najveća jačina električnog polja biće najmanja ako spoljašnja elektroda ima dva puta veći poluprečnik od unutrašnje (videti prethodni primer).

Za $r < a$ i $r > b$ polje je jednako nuli, što se lako vidi iz *Gaussovog* zakona.

♦ Kada se poluprečnik spoljašnje elektrode neograničeno uvećava, $b \rightarrow \infty$, sistem dve koncentrične sfere degeneriše u jednu usamljenu sferu.

Usamljena naelektrisana sfera			
$\varphi = U \frac{a}{r}$	$\vec{E} = U \frac{a}{r^2} \hat{r}$	$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$	$C = 4\pi\epsilon_0 a$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

$$\varphi = -C_1 \frac{1}{r} + C_2$$

$$U = -C_1 \frac{1}{a} + C_2$$

$$0 = -C_1 \frac{1}{b} + C_2$$

$$\varphi = U \frac{ab}{b-a} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\vec{E} = U \frac{ab}{b-a} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

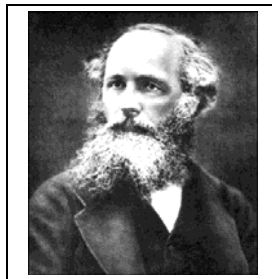
$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

$$E_{\max} = U \frac{b}{a(b-a)}$$

$$E_{\max_{\min}} = \frac{2U}{a} = \frac{4U}{a}$$

15 - Električna indukcija

Na osnovu rezultata *Faradayevog* eksperimenta i ideje o električnom polju *Maxwell* (*James Clarck Maxwell*, 1831-1879) je smatrao da je unošenje naelektrisanja u neku zapreminu praćeno izlaznim pomeranjem iste količine naelektrisanja kroz površinu kojom je ta zapremina ograničena. Šta više ta površina može biti zamišljena, pa tako i dolazi do uspostavljanja električnog polja u celom prostoru.



Razrađujući ovu ideju *Maxwell* je uveo vektor električnog pomeraja ili vektor električne indukcije, $\vec{D}$. Vektor $\vec{D}$ ima prirodu površinske gustine naelektrisanja i intenzitet mu je brojno jednak količini naelektrisanja koja se pomeri kroz jediničnu površinu koja je normalna na pravac pomeranja.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$[D] = \frac{C^2}{Nm^2} \frac{N}{C} = \frac{C}{m^2}$$

U vakuumu vektori $\vec{E}$ i $\vec{D}$ su kolinearni pa uvođenje još jednog vektora na prvi pogled izgleda suvišno. Divergencija vektora električne indukcije je

$$\text{div } \vec{D} = \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \epsilon_0 \text{div } \vec{E} = \rho \quad \Rightarrow \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

gde je ρ zapremenska gustina slobodnih naelektrisanja. U materijalnim sredinama pojaviće se i vezana naelektrisanja koja su izvor električnog polja ali nisu izvor polja električne indukcije, i to je suštinska razlika između ovih veličina. Matematičku formulaciju uticaja sredine u kojoj postoji električno polje je dao *Maxwell*. Zato se vrlo često za teoriju elektromagnetnih polja kaže *Faraday-Maxwellova* teorija.

"Pre nego što sam započeo izučavanje elektriciteta rešio sam da ne čitam matematiku o tome dok ne pročitam *Faradayeva Eksperimentalna istraživanja elektriciteta*. Bio sam svestan da se pretpostavljalo da postoji razlika između *Faradayevog* načina shvatanja pojava i načina matematičara, tako da ni on ni oni nisu bili zadovoljni jezikom onog drugog. "Kad sam preveo, ono što sam smatrao *Faradayevom* idejom, u matematičku formu, našao sam da se rezultati dva metoda uglavnom podudaraju tako da se iste pojave mogu objasniti i isti zakoni delovanja mogu izvesti i jednim i drugim metodom." ... "*Faraday* je svojim misaonim okom video linije sila kako prožimaju ceo prostor tamo gde su matematičari videli centre sila koje deluju iz daleka. *Faraday* je video medijum tamo gde oni nisu videli ništa sem odstojanja. *Faraday* je tražio sedište fenomena u realnim delovanjima koja se prostiru kroz medijum, dok su se oni zadovoljili da ga nađu u dejstvu na daljinu kojem su podvrgnuti električni fluidi."

16 - Kapacitivnost

Električna kapacitivnost ili samo kapacitivnost je sposobnost tela da zadrži naelektrisanja. Svako telo koje može da se naelektriše ima svojstvo kapacitivnosti.

Za usamljeno provodno telo kapacitivnost se često naziva sopstvena kapacitivnost i jednaka je količniku količine naelektrisanja i potencijala provodnika.

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

Kapacitivnost je brojno jednaka količini naelektrisanja koje je potrebna da bi provodnik sa nultog potencijala bio doveden na jedinični potencijal u odnosu na referentne tačke. Kapacitivnost je za dato telo konstantna.

U sistemu jedinica SI, jedinica za kapacitivnost je farad i ima oznaku F po *Michaelu Faradayu*.

$$[C] = \frac{C}{V} = F$$

Iz izraza za kapacitivnost provodne sfere sledi:

♦ Farad je velika jedinica i tek sfera poluprečika od devet miliona kilometara ima kapacitivnost od jednog farada.

♦ Kapacitivnost dela provodnika je manja od kapacitivnosti celog provodnika.

♦ Kapacitivnost je dimenziono dužina.

♦ Latinska reč *capacitas* sa značenjem "prostor u kome ima mesta za mnogo stvari" je usvojena za električnu veličinu.

♦ Jedinica za dielektričnu konstantu koja je u upotrebi je farad po metru.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 a$$

$$[\epsilon_0] = \frac{F}{m}$$

Kad provodno telo nije usamljeno potencijali tela zavise od količina naelektrisanja na svim telima. Važi i obrnuto, potencijal posmatranog tela zavisi od naelektrisanja na tom telu ali i od naelektrisanja na susednim telima. Dakle, moguće je napisati dva sistema jednačina.

Primer:	Nepoznata naelektrisanja	Nepoznati potencijali
Međusobni	$\varphi_1 = a_{11} q_1 + a_{12} q_2$	$q_1 = b_{11} \varphi_1 + b_{12} \varphi_2$
uticaj	$\varphi_2 = a_{21} q_1 + a_{22} q_2$	$q_2 = b_{21} \varphi_1 + b_{22} \varphi_2$
dva tela	a_{ij} - potencijalni koeficijenti	b_{ij} - koeficijenti indukcije

Očigledno koeficijenti b_{ij} imaju prirodu kapacitivnosti. Da bi se izbegla protivurečnost između njihove prirode i negativnog znaka koji se javlja kod međusobnih koeficijenata, prethodni sistem jednačina je potrebno napisati u obliku koji ima i svoje fizičko značenje.

Sada su koeficijenti delimične kapacitivnosti. Sa jednakim indeksima su sopstvene, a sa različitim indeksima su međusobne kapacitivnosti.

$$q_1 = C_{11} \varphi_1 + C_{12} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$q_2 = C_{21} (\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22} \varphi_2$$

Ako se jednačine podele dielektričnom konstantom tada one predstavljaju raspodelu fluksa u sistemu.

Primer 16 - Obrtni elipsoid, sfera, cilindar i disk

Usamljeno linijsko naelektrisanje dužine $2c$ je ravnomerno naelektrisano podužnom gustinom naelektrisanja q' . U nekoj tački polja potencijal u odnosu na tačke u beskonačnosti je

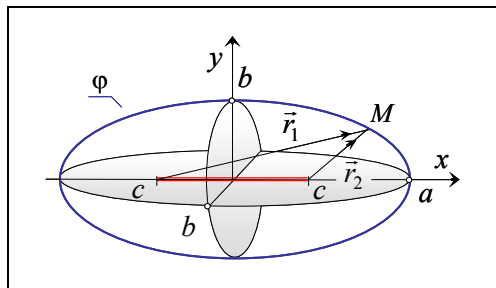
$$\varphi = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \int_{-c}^c \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \quad \text{tj.} \quad \varphi = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x+c+\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{x-c+\sqrt{(x-c)^2+y^2}},$$

gde je integral rešen smenom $x-x' = y \operatorname{sh} t$, $dx' = -y \operatorname{ch} t$. Ekvipotencijalne površine se dobijaju iz uslova $\varphi = \text{const.}$ ili

$$\frac{x+c+\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{x-c+\sqrt{(x-c)^2+y^2}} = \text{const.}$$

ili prema oznakama sa slike

$$\frac{r_1 + x + c}{r_2 + x - c} = k$$



Takođe, sa iste slike je očigledno

$$y^2 = r_1^2 - (x+c)^2 \quad \text{i} \quad y^2 = r_2^2 - (x-c)^2, \quad \text{odakle sledi}$$

$$\frac{r_1 + (x+c)}{r_2 + (x-c)} = \frac{r_2 - (x-c)}{r_1 - (x+c)} \quad \text{što znači da je i} \quad \frac{r_2 - (x-c)}{r_1 - (x+c)} = k. \quad \text{Iz prvog i poslednjeg}$$

odnosa se dobija $r_1 = k r_2 + k(x-c) - (x+c)$, $r_2 = k r_1 - k(x+c) + (x-c)$,

pa je $r_1 + r_2 = 2c \frac{k+1}{k-1} = \text{const.}$ Ekvipotencijalne površine su rotacioni elipsoidi

čije su žiže u tačkama na krajevima linijskog naelektrisanja. Prema tome svaki rotacioni elipsoid čija se površina poklapa sa nekom od ekvipotencijalnih površina i koji je naelektrisan količinom naelektrisanja $q = 2c q'$ je na potencijalu koji je jednak potencijalu bilo koje tačke koja pripada toj površini. Na primer, za elipsoid čije su poluose a i b , a ekscentricet $c^2 = a^2 - b^2$, i za tačku $x = a$, $y = 0$, iz izraza za potencijal bilo koje tačke u polju sledi

$$\varphi = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c} \ln \frac{a+c}{a-c} \Rightarrow C = \frac{q}{\varphi} = \frac{8\pi\epsilon_0 c}{\ln \frac{a+c}{a-c}} \quad \text{ili} \quad C = 4\pi\epsilon_0 \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\ln \frac{a+\sqrt{a^2 - b^2}}{b}}$$

Iz izraza za kapacitivnost obrtnog elipsoida sledi izraz za kapacitivnost sfere poluprečnika a , tj. za $c \rightarrow 0$ tj. $b \rightarrow a$ sledi $C = 4\pi\epsilon_0 a$; Za $a = 0$ se dobija kapacitivnost diska poluprečnika b , tj. $C = 8\epsilon_0 b$. Takođe je moguće dobiti približne izraze za kapacitivnost veoma izduženog rotacionog elipsoida oblika olovke ili kapacitivnost kružnog cilindra oblika olovke.

17 - Uopštenje pojma kapacitivnosti - kondenzator

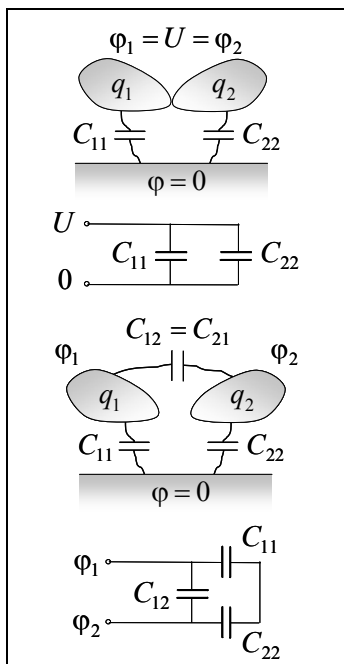
Za sistem od dva naelektrisana tela moguća su dva slučaja. U nesimetričnom slučaju su potencijali tela jednaki. Rešavanjem poslednjeg sistema jednačina (lekcija 16) sledi da kapacitivnost između tela ne postoji (u elektrostatičkom smislu to je samo jedno provodno telo), ali postoji kapacitivnost tela prema tačkama na nultom potencijalu. Ekvivalentna kapacitivnost je paralelna veza delimičnih sopstvenih kapacitivnosti.

$$Q = q_1 + q_2 = (C_{11} + C_{22})U = CU$$

U simetričnom slučaju je

$$q_1 = -q_2 = q \quad \text{ i } \quad \phi_1 - \phi_2 = U.$$

Ovakav sistem od dva provodna naelektrisana tela je nazvan kondenzator jer u elektrostatici naelektrisanja ne napuštaju električno odvojena naelektrisana tela i na njima se skupljaju (zgušnjavaju) tj. kondenzuju.



Ako se jednačine poslednjeg sistema saberu sledi veza iz koje je očigledno da su potencijali tela suprotnog znaka. Kad se došlo do saznanja o električnoj struji, provodna tela su nazvana elektrodama. *Faraday* je pri proučavanju elektrolize pozitivnu elektrodu nazvao anoda, a negativnu elektrodu katoda. Ako se prva jednačina pomnoži sa C_{22} , a druga sa C_{11} , pa se zatim od prve jednačine oduzme druga, i imajući u vidu da je $C_{12} = C_{21} = C$, sledi da je

$$Q = q = \left(C_{12} + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{22}} \right) U = (C + C_p)U$$

Prvi sabirak je kapacitivnost kondenzatora. Drugi sabirak je ukupna kapacitivnost oba tela prema tačkama koje su na nultom potencijalu. Sopstvene delimične kapacitivnosti su, preko tačke nultog potencijala u serijskoj ili rednoj vezi. U elektrotehnici sopstvene delimične kapacitivnosti vrlo često stvaraju neželjena dejstva i zato su nazvane parazitne kapacitivnosti. Ako su dimenzije elektroda i njihovo međusobno rastojanje znatno manje od rastojanja do tačaka koje su na nultom potencijalu tada su parazitne kapacitivnosti zanemarljive u odnosu na kapacitivnost kondenzatora. Međutim, moguće je postići potpunu nezavisnost elektrodnog sistema od rasporeda ostalih tela. To se postiže stavljanjem elektrodnog sistema u metalni oklop. Oklapanje elektrodnog sistema predstavlja savršenu elektrostatičku zaštitu. Isti je slučaj i kad jedna elektroda obuhvata drugu, na primer sferni kondenzator ili koaksijalni vod.

Primer 17 - Kapacitivnost kondenzatora

Za elementarne geometrije elektroda (ravna, cilindrična, sferna) izrazi za jačinu električnog polja i raspodelu potencijala su izvedeni u ranijim lekcijama i to primenom *Gaussovog zakona* i rešavanjem *Laplaceove jednačine*. Iz tih izraza se jednostavno dobijaju i izrazi za kapacitivnost odgovarajućih kondenzatora.

Ravan kondenzator	Cilindrični kondenzator	Sferni kondenzator
$E = \frac{\eta}{\epsilon_0}$	$E = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 r}$	$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
$U = \frac{\eta}{\epsilon_0} d = \frac{q}{\epsilon_0 S} d$	$U = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$	$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$
$C = \frac{q}{U} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$	$C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}$	$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$

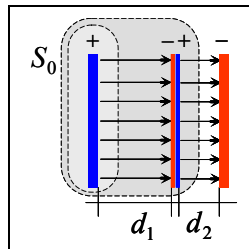
♦ Iz izraza za kapacitivnost sfernog kondenzatora se dobija i kapacitivnost usamljene sfere ako se pusti da $b \rightarrow \infty$.

$$C = 4\pi\epsilon_0 a$$

♦ Iz kapacitivnosti usamljenog elipsoida se dobija isti rezultat, ali se dobija i kapacitivnost kružnog diska poluprečnika a .

$$C = 8\epsilon_0 a$$

♦ Neka u kondenzatoru postoji neutralna elektroda tj. elektroda koja nije priključena na neki napon a koja kondenzator deli na dva dela. Primena *Gaussovog zakona* pokazuje da je u oba dela kondenzatora električno polje istog pravca, smera i jačine jer je zamišljenom zatvorenim površinom S_0 uvek obuhvaćena ista količina naelektrisanja. Međutim, napon u kondenzatoru je podeljen.



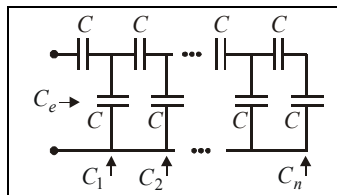
$$\frac{U}{q} = \frac{E d}{q} = \frac{E d_1 + E d_2}{\eta S} = \frac{\eta}{\epsilon_0} \frac{d_1 + d_2}{\eta S} = \frac{d_1}{\epsilon_0 S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 S} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Dobijena je formula za ekvivalentnu kapacitivnost redne veze dva kondenzatora. Neutralna elektroda ne menja kapacitivnost kondenzatora (videti primer 18).

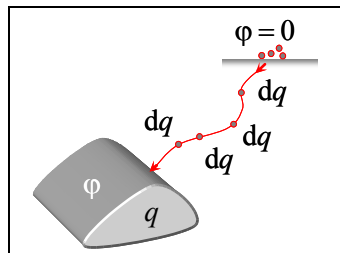
Zadatak 17.1 - Proceniti kapacitivnosti usamljenih elektroda oblika kvadrata i oblika kocke kao srednju vrednost upisanih i opisanih krugova, odnosno sfera.

Zadatak 17.2 - Kondenzatorska kaskada se sastoji od n jednakih ćelija, kao što je to prikazano na slici. Izračunati ekvivalentnu kapacitivnost beskonačne kaskade. Pretpostaviti da se ekvivalentna kapacitivnost ne menja ako se izostavi jedan kondenzator.



18 - Energija elektrostatičkog polja - 1

Energija elektrostatičkog sistema je brojno jednaka radu koji je uložen za naelektrisanje tog sistema. Neka sistem sadrži samo jedno telo koje se nalazi na potencijalu φ . Dovođenjem količine naelektrisanja dq od referentne tačke do tela izvrši se elementarni rad i za istu brojnu vrednost se uvećava i energija. Na kraju procesa je



$$W = \int_0^q \varphi dq = \frac{1}{C} \int_0^q q dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q \varphi$$

U polju koje stvara sistem od N naelektrisanih tela između kojih postoji zapreminska gustina naelektrisanja izraz za energiju postaje uprošćen. Energiju je moguće izraziti i preko jačine električnog polja (detaljno izvođenje izraza je ovde izostavljeno, videti 29).

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i + \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dV$$

Oba izraza za energiju su potpuno ravnopravna u pogledu izračunavanja, ali drugi izraz ima fizičko tumačenje. Energija je lokalizovana u polju. Za energiju koja je sadržana u polju ravnog kondenzatora na oba načina se dobija isti rezultat,

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varphi_i q_i = \frac{1}{2} (q\varphi_1 - q\varphi_2) = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2,$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{U^2}{d^2} Sd = \frac{1}{2} CU^2.$$

Ako se u elektrostatičko polje unese nenaelektrisano telo ili telo na nultom potencijalu tada se energija lokalizovana u polju menja.

♦ Energija se povećava ako potencijali ostaju nepromenjeni (izvor napajanja je stalno priključen),

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} U^2 (C - C_{12}) > 0, \quad U = \text{const.}$$

♦ Energija se smanjuje ako količine naelektrisanja ostaju nepromenjene (izvor napajanja je pre unošenja novog tela isključen),

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} q^2 \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C_{12}} \right) < 0, \quad q = \text{const.}$$

Thompsonova teorema (ovde bez dokaza) - Raspodela naelektrisanja na provodnim telima je uvek takva da je energija u polju minimalna.

Primer 18 - Promena energije u ravnom kondenzatoru

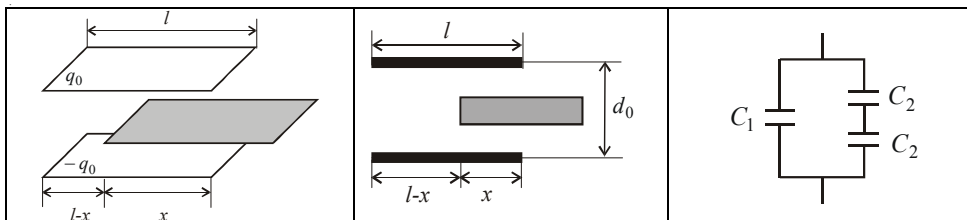
Ravan kondenzator sačinjen od pravougaonih elektroda površina S_0 koje se nalaze na međusobnom rastojanju d_0 i priključen je na izvor napajanja U_0 . Kad se paralelno sa elektrodama u polje kondenzatora jednim delom unese neutralna provodna ravan doći će do promene energije.

Pre unošenja neutralne elektrode kondenzator je imao kapacitivnost C_0 i energija sadržana u polju je bila W_0 .

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S_0}{d_0}, \quad S_0 = la, \quad W_0 = \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_0} = \frac{1}{2} q_0 U_0.$$

Posle unošenja neutralne elektrode ekvivalentan sistem se sastoji od mešovite veze tri kondenzatora čije su kapacitivnosti (videti sliku) i ekvivalentna kapacitivnost sledeće:

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{(l-x)a}{d_0} = \left(1 - \frac{x}{l}\right) C_0, \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{xa}{d_0/2} = \frac{2x}{l} C_0, \quad C_e = C_1 + \frac{C_2 C_2}{C_2 + C_2} = C_0.$$



Kako je kondenzator stalno priključen na izvor napajanja energija ostaje nepromenjena, jer je i ekvivalentna kapacitivnost jednaka početnoj, što je u suprotnosti sa poznatim rezultatom da je moralo doći do promene energije. Prvo, pri proračunu su zanemareni efekti krajeva a unošenjem nove elektrode ovi efekti se povećavaju. Drugo, uneta elektroda zauzima zapreminu u kojoj je prethodno postojalo polje, što je takođe zanemareno. Sa elektrodom konačne debljine dobija se rezultat koji je u saglasnosti sa poznatim. Neka elektroda koja se unosi u polje ima debljinu $d = d_0 / n$, $n > 1$. Sada je:

$$C_1 = \left(1 - \frac{x}{l}\right) C_0, \quad C_2 = \frac{2x}{l} \frac{n}{n-1} C_0, \quad C_e = \left(1 + \frac{x}{l} \frac{1}{n-1}\right) C_0 > C_0.$$

Ako je kondenzator stalno priključen na izvor napajanja, napon ostaje isti, ekvivalentna kapacitivnost je veća i energija se povećava.

$$W = \frac{1}{2} C_e U_0^2 > W_0$$

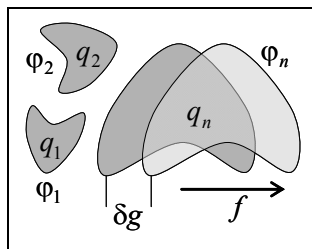
Ako je kondenzator isključen sa izvora napajanja, količine naelektrisanja ostaju iste, ekvivalentna kapacitivnost je veća, a energija se smanjuje.

$$W = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_e} < W_0$$

19 - Energija i sila

U nekim slučajevima je moguće odrediti rezultantnu silu i rezultantne momente na osnovu poznate ukupne energije elektrostatičkog sistema. Metod je poznat kao metod virtuelnih pomeraja i zasnovan je na zakonu o održanju energije.

Pomeraji koji su mogući ali nisu i ostvareni (zamisljeni pomeraji) daju mogućnost za određivanje rezultantnih sila i momenata. Ako neko telo u elektrostatičkom sistemu izvrši virtuelni pomeraj energija elektrostatičkog sistema će se promeniti.



Ako je pomeraj izveden tako da nije došlo do pretvaranja energije u neki drugi makroskopski vid, onda je promena energije dW jednaka izvršenom radu dA . Rad je rezultat delovanja neke uopštene ili generalisane sile f duž neke uopštene ili generalisane koordinate g .

$$\delta A = f \delta g$$

$$f = \frac{\delta A}{\delta g}$$

Ako je uopštena koordinata dužina tada je f sila, i ako je uopštena koordinata ugao tada je uopštena sila f moment.

Pozitivan priraštaj energije može nastati samo na račun uloženog rada koji izvrši spoljašnja mehanička sila protiv sila polja (generatori su isključeni, količine naelektrisanja ostaju nepromenjene). Smanjenje energije sistema, ili negativni priraštaj, znači rad sila polja (generatori su uključeni, potencijali ostaju nepromenjeni i količine naelektrisanja se menjaju na račun energije generatora).

Primer 19 - Obrtni kondenzator

Za merenje napona moguće je iskoristiti kondenzator promenljive kapacitivnosti. Neka su elektrode kondenzatora oblika kružnog isečka poluprečnika a .

Kada je jedna od elektroda obrtna a druga nepokretna kapacitivnost ovog kondenzatora zavisi od površine preklapanja S , odnosno od ugla preklapanja α i međuelektrodnog rastojanja d ,

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon_0 \frac{a^2 \alpha}{2d}.$$

Kondenzator je priključen na nepoznati napon U . Energija sadržana u polju kondenzatora je, W

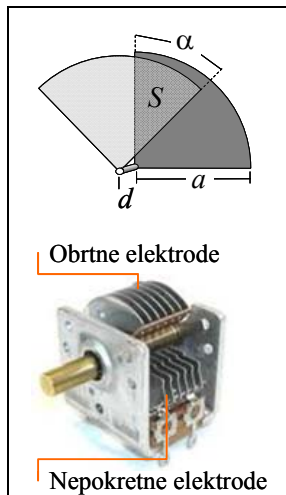
$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{4} \epsilon_0 \frac{a^2}{d} U^2 \alpha.$$

Očigledno, u ovom slučaju je generalisana koordinata ugao i generalisana sila je moment, tj.

$$f = \begin{cases} -\frac{\partial W}{\partial g}, & q = \text{const.} \\ +\frac{\partial W}{\partial g}, & \varphi = \text{const.} \end{cases}, \quad M = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{1}{4} \epsilon_0 \frac{a^2}{d} U^2.$$

U ravnotežnom stanju ovaj moment je uravnotežen mehaničkim putem, obično momentom spiralne opruge sa linearnom karakteristikom, $M = k\alpha$.

Tako se dobija da je skretanje obrtne elektrode srazmerno kvadratu napona na koji je kondenzator priključen.



Zadatak 19.1 - Odrediti silu između elektroda ravnog kondenzatora pri stalnom napajanju.

Zadatak 19.2 - Ravan kondenzator čije elektrode su pravougaonog oblika dimenzija a i b na međusobnom rastojanju d , stalno je priključen na izvor napajanja U . Odrediti silu koja je potrebna da se jedna od elektroda pomeri u pravcu koji je upravan na polje. Efekat krajeva zanemariti.

Zadatak 19.3 - Jedna elektroda ravnog kondenzatora je nepokretna dok je druga obešena o oprugu. Kada je kondenzator isključen sa izvora napajanja rastojanje između elektroda je x . Kada se kondenzator priključi na napon U opruga se istegne za Δx . Ako je opruga sa linearnom karakteristikom $F = \alpha x$, odrediti vrednost priključenog napona.

20 - Tačkasti simetrični električni dipol

Kad je rastojanje d između dva tačkasta naelektrisanja $-q$ i $+q$ znatno manje od rastojanja bilo kojeg od njih do tačke u polju $R_1, R_2 \ll d$ tada je

$$R_1 R_2 \approx r^2 \text{ i } R_2 - R_1 \approx d \cos \theta.$$

Ova dva naelektrisanja čine električni dipol čiji je moment

$$\vec{p} = q\vec{d}.$$

Električni potencijal u udaljenim tačkama je

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

Električno polje je degradient potencijala. U sfernom koordinatnom sistemu je

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \hat{\theta} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}).$$

Kako je $\vec{d} = d \cos \theta \hat{r} - d \sin \theta \hat{\theta}$ i $\sin \theta \hat{\theta} = \cos \theta \hat{r} - \hat{d}$ to se zamenom dobija

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3pr \cos \theta}{r^4} \hat{r} - \frac{p}{r^3} \hat{d} \right) \quad \text{ili} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right).$$

Do istog rezultata dolazi se jednostavnije primenom pravila vektorske analize.

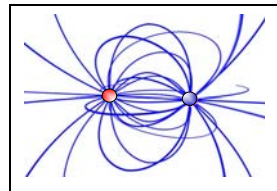
$$\text{grad} \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = (\vec{p}\vec{r}) \text{grad} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \text{grad} (\vec{p}\vec{r}) = -(\vec{p}\vec{r}) \frac{3}{r^5} + \frac{1}{r^3} \vec{p},$$

gde je iskorišćena činjenica da je $\vec{p}$ konstantan vektor. Zamenom u izraz za električno polje se dobija poznati rezultat.

Tačke u kojima se određuje potencijal nisu obavezno znatno udaljene od dipola.

U opštem slučaju je

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\left(r^2 + \left(z - \frac{d}{2} \right)^2 \right)^{-1/2} - \left(r^2 + \left(z + \frac{d}{2} \right)^2 \right)^{-1/2} \right)$$



Osim u beskonačnosti ($r \rightarrow \infty$) potencijal je jednak nuli i u tačkama koje pripadaju simetralnoj ravni, jer je $\varphi = 0$ za $z = 0$.

Prethodna razmatranja dovode do zaključaka koji su iskazani kroz tri teoreme koje su posledica zakona o održanju energije.

Primer 20 – Dipol, sila, moment

Tačkasti simetrični električni dipol rastojanja između naelektrisanja d nalazi se u koordinatnom početku i usmeren je u pravcu z -ose. Na rastojanju z od koordinatnog početka je tačkasto naelektrisanje Q . Naći intenzitet vektora električnog polja u koordinatnom početku.

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R_1^2} \hat{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2} \hat{z}, \quad \vec{F}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R_2^2} \hat{z} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2} \hat{z}.$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2} \right) \hat{z} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{2zd}{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 \left(z - \frac{d}{2}\right)^2} \hat{z}$$

Ako je $d \ll z$ tada je

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{2zd}{z^4} \hat{z}, \quad \text{odnosno} \quad \vec{F} = \frac{2Q\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 z^3},$$

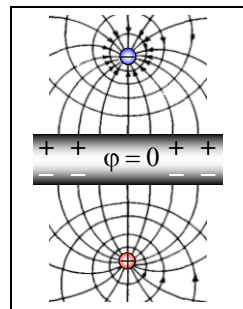
gde je $\vec{p} = qd \hat{z}$ moment dipola. Za električno polje i moment se dobija

$$\vec{E} = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 z^3} \quad \text{i} \quad \vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = 0.$$

21 - Tri teoreme

♦ **Teorema o metalizovanju ekvipotencijalnih površina.** Elektrostatičko polje ostaje neizmenjeno ako se deo jedne ili više ekvipotencijalnih površina zameni beskonačno tankim slojem provodnika jer je i provodnik ekvipotencijalan, a po teoremi o jednoznačnosti rešenja *Laplaceove* ili *Poissonove* jednačine neće biti promena ni u jednoj tački polja.

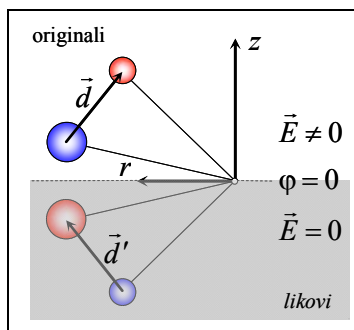
Ako se metalizuje neka zatvorena ekvipotencijalna površina na njenoj spoljašnjoj strani je naelektrisanje koje je jednako po količini i znaku obuhvaćenom naelektrisanju. Na unutrašnjoj strani je isto toliko naelektrisanje suprotnog znaka. Ako se metalizuje neka od ekvipotencijalnih površina tačkastog naelektrisanja, dolazi se do zaključka da je polje naelektrisane sfere isto kao i polje tačkastog naelektrisanja koje je obuhvaćeno sferom (videti: *Faradayev* eksperiment sa peharom)



♦ **Teorema ekvivalencije.** Sve raspodele izvora električnog polja, koje u nekom prostoru stvaraju isto električno polje su u odnosu na taj prostor ekvivalentne. Preciznije, za ekvivalenciju je dovoljno da različite raspodele naelektrisanja stvaraju iste tangencijalne komponente vektora električnog polja.

♦ **Teorema lika u ravnom provodnom ogledalu.** To je specijalan slučaj teoreme ekvivalencije ili teoreme o metalizovanju ekvipotencijalnih površina. U delu prostora koji je ograničen beskonačnom provodnom ravni na nultom potencijalu postoje izvori električnog polja.

Uticaj ravni na raspodelu polja je moguće zameniti likovima izvora polja u odnosu na ravan, tj. naelektrisanjima koja su suprotnog znaka i koja su simetrično raspoređena u odnosu na ravan. U cilindričnom koordinatnom sistemu čiji koordinatni početak pripada provodnoj ravni funkcija koja opisuje raspodelu potencijala kad je uticaj ravni zanemaren je $\varphi_1(r, z)$. U delu prostora gde polje realno postoji je:



$$\varphi(r, z) = \varphi_1(r, z) - \varphi_1(r, -z), \quad \varphi(r, z)|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi(r, z)}{\partial r} \right|_{z=0} = 0.$$

Da bi funkcija $\varphi(r, z)$ predstavljala stvarnu raspodelu potencijala u delu prostora gde izvori polja postoje, potrebno je da budu zadovoljeni granični uslovi. Oba uslova su očigledno zadovoljena, pa je na osnovu teoreme o jednoznačnosti rešenja *Laplaceove* jednačine funkcija $\varphi(r, z)$ i jedino moguće rešenje.

Primer 21.1 - Sila između površinskog i tačkastog naelektrisanja

Iznad provodne ravni, koja je naelektrisana površinskom gustinom naelektrisanja η , na visini h se nalazi tačkasto naelektrisanje q . Sila koja deluje na tačkasto naelektrisanje se sastoji od dve komponente. Prva komponenta, F_1 , potiče od površinskih naelektrisanja na ravni i može da bude privlačna ili odbojna,

$$\vec{F}_1 = \begin{cases} +q \frac{\eta}{\epsilon_0} \hat{z}, & q\eta > 0 \\ -q \frac{\eta}{\epsilon_0} \hat{z}, & q\eta < 0 \end{cases}.$$

Druga komponenta, F_2 , potiče od naelektrisanja koja su indukovana prisustvom tačkastog naelektrisanja, i dobija se primenom lika u ravnom provodnom ogledalu, i uvek je privlačna,

$$\vec{F}_2 = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2h)^2} \hat{z} = -\eta_i \frac{q}{\epsilon_0} \hat{z}, \quad \text{gde je} \quad \eta_i = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{(2h)^2}.$$

Za ukupnu silu se dobija

$$\vec{F} = \begin{cases} +\frac{q}{\epsilon_0}(\eta - \eta_i) \hat{z}, & q\eta > 0 \\ -\frac{q}{\epsilon_0}(\eta + \eta_i) \hat{z}, & q\eta < 0 \end{cases}.$$

Kad su naelektrisanja suprotnog znaka, $q\eta < 0$, sila je uvek privlačna i orijentisana ka ravni. Kad su naelektrisanja istog znaka, $q\eta > 0$, moguća su tri slučaja.

- $\eta > \eta_i$ ► Sila je odbojna.
- $\eta = \eta_i$ ► Sila je jednaka nuli i tačkasto naelektrisanje se nalazi u stanju labilne ravnoteže.
- $\eta < \eta_i$ ► Sila je privlačna i pored činjenice da su naelektrisanja istog znaka.

Poslednja dva slučaja nisu moguća bez dejstva sila neelektričnog porekla.

Zadatak 21.1 - Podužno naelektrisanje q' nalazi se na jednakim rastojanjima od dve ravni koje se seku po pravim uglom. Primenom teoreme lika u ravnom provodnom ogledalu odrediti potencijal i električno polje.

Zadatak 21.2 - Kružni obruč čiji je poluprečnik a , načinjen od provodnika čiji je poluprečnik b , naelektrisan je količinom naelektrisanja q i nalazi se paralelno sa savršeno provodnom zemljom na visini h . Odrediti raspodelu potencijala i električnog polja u tačkama koje pripadaju osi obruča.

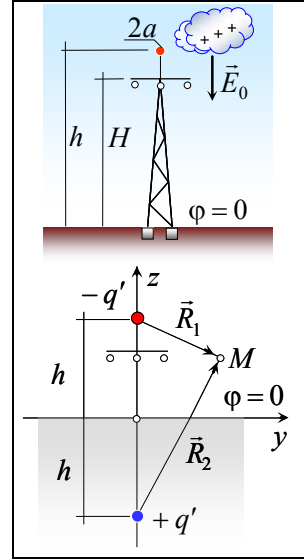
Primer 21.2 - Gromobransko uže

Iznad provodnika dalekovoda montiran je uzemljeni provodnik. Ceo sistem se nalazi u atmosferskom homogenom električnom polju,

$$\vec{E}_0 = -E_0 \hat{z}, \quad \varphi_0 = -E_0 \int_z^0 dz = E_0 z.$$

Pod dejstvom stranog polja u provodniku se indukuju naelektrisanja gustine q' . Ta naelektrisanja indukuju istu količinu naelektrisanja suprotnog znaka koje je raspoređeno po površini zemlje, i čiji uticaj je moguće zameniti električnim likom. Potencijal koji u proizvoljnoj tački M stvara ovaj elektrostatički sistem je

$$\varphi = E_0 z + \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = E_0 z + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{y^2 + (z+h)^2}{y^2 + (z-h)^2}.$$



Na površini uzemljenog provodnika, na primer u tački $y=0$, $z=h-a$, potencijal je jednak nuli. Ako je $h \gg a$, što je inače slučaj kod realnih sistema, iz gornjeg uslova sledi izraz za podužnu gustinu indukovanih naelektrisanja.

$$E_0(h-a) + \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h-a}{a} = 0$$

$$q' = -2\pi\epsilon_0 \frac{E_0 h}{\ln \frac{2h}{a}}$$

Zamenom u početni izraz dobijaju se konačni izrazi za potencijal i električno polje. Na osi sistema $y=0$ postoji samo z -komponenta električnog polja.

$$\varphi = E_0 z - \frac{E_0 h}{2 \ln \frac{2h}{a}} \ln \frac{y^2 + (z+h)^2}{y^2 + (z-h)^2}$$

$$\vec{E}_y = -\frac{E_0}{\ln \frac{2h}{a}} \frac{4yzh^2}{(y^2 + (z+h)^2)(y^2 + (z-h)^2)} \hat{y}$$

$$\vec{E}_z = -E_0 \hat{z} + \frac{E_0}{\ln \frac{2h}{a}} \frac{2h^2(y^2 - z^2 + h^2)}{(y^2 + (z+h)^2)(y^2 + (z-h)^2)} \hat{z}$$

$$E_p = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{E_0 h}{r \ln \frac{2h}{a}}$$

Jednostavnije nego da se potraži moduo vektora električnog polja do približnog rezultata se dolazi iz izraza za električno polje podužnog naelektrisanja.

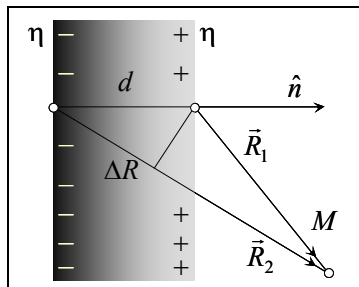
Uzemljeni provodnik znatno slabi primarno polje. Sa realnim podacima oko 60%. Zato pre svega ima zaštitnu ulogu tj. služi kao gromobran.

Na površini zaštitnog provodnika polje ima veoma veliku vrednost pa u njegovoj okolini vazduh postaje provodan ($E_p \approx 30 \text{ kV/cm}$) i dolazi do sporog ili brzog pražnjenja atmosferskog naelektrisanja u zemlju.

22 - Površinski električni dipol - dvojni električni sloj

Sistem od dve površine koje su ravnomerno naelektrisan površinskim gustinama naelektrisanja $+\eta$ i $-\eta$, i čije je međusobno rastojanje d znatno manje od udaljenosti tačaka u kojima je potrebno odrediti električno polje i potencijal, čine površinski električni dipol ili dvojni električni sloj.

Ovaj zamišljeni elektrostatički sistem pruža mogućnost da se u elektrostatičkim sistemima opišu razdvojne površine, i još opštije da se uticaj izvora električnog polja na neki deo prostora zameni površinskom raspodelom naelektrisanja po površini koja razmatrani deo prostora ograničava. U suštini dvojni električni sloj je poseban slučaj teoreme ekvivalencije.



U odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti, potencijal koji ovaj elektrostatički sistem stvara u nekoj tački polja M je prema principu linearne superpozicije zbir potencijala koji potiču od svakog sloja posebno,

$$\varphi = \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dS}{R_1} - \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{dS}{R_2} = \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0} \int_S \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dS.$$

Za udaljene tačke ($d \ll R_1, R_2$) u polju je:

$$R_1 \approx R_2 = R \quad \text{i} \quad \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \approx \frac{\Delta R}{R^2} = \frac{d \cos(\hat{n}, \vec{R})}{R^2}$$

i za potencijal se dobija

$$\varphi = \frac{\eta d}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\cos(\hat{n}, \vec{R})}{R^2} dS = \frac{\eta d}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\hat{R} d\vec{S}}{R^2}$$

Iz bilo koje tačke vidi se samo jedna strana dvojnog sloja, pa je jasno da prostorni ugao Ω predstavlja ugao pod kojim se vidi kontura na koju se oslanja dvojni električni sloj.

Na osnovu definicije prostornog ugla se dobija konačan izraz za potencijal koji dvojni električni sloj stvara u udaljenim tačkama.

$$\varphi = \frac{\eta d}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

Proizvod debljine sloja i površinske gustine naelektrisanja je električni moment sloja ili površinski električni moment.

Za napon između slojeva i potencijal se dobija

$$U = \vec{E} \vec{d} = \frac{\eta d}{\epsilon_0}, \quad \varphi = \frac{U}{4\pi} \Omega$$

Primer 22 - Dvojni električni sloj oblika kruga

Dve ravne površine oblika kruga poluprečnika a nalaze se na međusobnom rastojanju d i naelektrisanje su površinskim gustinama naelektrisanja $+\eta$ i $-\eta$. U tačkama koje pripadaju osi dvojnog električnog sloja potencijal je

$$\varphi = \frac{\eta d}{4\pi\epsilon_0} \Omega,$$

gde je

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{z/a}{\sqrt{1+(z/a)^2}} \right),$$

prostorni ugao pod kojim se vidi kontura ovog sloja.

Do istog rezultata je moguće doći i na osnovu potencijala koji stvara usamljena kružna ploča,

$$\varphi = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - z \right) - \frac{\eta}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + (z+d)^2} - (z+d) \right),$$

ili

$$\varphi = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + (z+d)^2} + d \right)$$

Kako je rastojanje između slojeva d znatno manje od ostalih dimenzija, drugi sabirak je moguće razviti u *Taylorov* red u kolini tačke $d=0$,

$$f(d) = \sqrt{a^2 + (z+d)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} d^n$$

$$f(d) = \sqrt{a^2 + z^2} + \frac{zd}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{a^2 z^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} + \dots$$

Kad se u proračun uključe samo prva dva člana reda, jer su ostali zanemarljivi, dobija se (takođe videti primer 2 i primer 3)

$$\varphi = \frac{\eta d}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z/a}{\sqrt{1+(z/a)^2}} \right),$$

što je već poznat rezultat.

Zadatak 22.1 - Odrediti potencijal koji stvara dvojni električni sloj oblika poluravnini.

Zadatak 22.2 - Odrediti potencijal koji stvara dvojni električni sloj oblika beskonačne trake čija je širina $2b$.

23 - Dielektrici

Dielektrici su čvrste, tečne i gasovite materije koje ne provode električnu struju. Dielektrici su izolatori. Tačnije, izolatori su loši provodnici. Izolatori imaju sasvim malu provodnost i u neznatnoj meri provode električnu struju. Pojam idealnog izolatora je samo prva aproksimacija stvarnog stanja. Uticaj dielektrika na privlačenje ili odbijanje naelektrisanih tela primećen je na samom početku razvoja nauke o elektricitetu. Prvi matematički nagoveštaj vidi se već iz *Coulombovog* zakona - sila zavisi od sredine u kojoj se nalaze naelektrisanja.

Cavendish (*Henry Cavendish*, 1731-1810), i zatim nezavisno od njega, i *Faraday* su utvrdili da se kapacitivnost kondenzatora menja ako se između elektroda kondenzatora unese dielektrična materija. Rezultati njihovih eksperimenata su pokazali da promena kapacitivnosti kondenzatora ne zavisi ni od oblika ni od veličine elektroda ako se ceo međuelektrodni prostor ispuni dielektričnom materijom, već zavisi samo od vrste dielektrika.



Za razliku od provodnika, dielektrici ne sadrže slobodne elektrone i sastoje se ili od električno neutralnih molekula kakve su sve amorfne materije ili od jona koji se nalaze u čvorovima neke kristalne rešetke koja je u celini električno neutralna. U oba slučaja naelektrisanja su vezana elastičnim međuatomskim i međumolekularnim silama i pod dejstvom spoljašnjeg električnog polja mogu napustiti svoje ravnotežne položaje za mikroskopski mala rastojanja, zauzimajući tako nove ravnotežne položaje. Tako dolazi do polarizacije dielektrika koji u celini više nije električno neutralan. Vezana naelektrisanja su naelektrisanja neutralnih molekula i joni kristalne rešetke koji nemogu da napuste materiju i koja su pod dejstvom stranog električnog polja zauzela nove ravnotežne položaje. Polarizacija dielektrika je proces pomeranja vezanih naelektrisanja pod dejstvom spoljašnjeg električnog polja na nove ravnotežne položaje. Kad jačina spoljašnjeg električnog polja ima kritičnu vrednost, tj. takvu vrednost da *Coulombova* sila postane veća od međumolekularnih sila, dolazi do cepanja molekula i do električnog proboja u dielektriku. Kritična vrednost jačine električnog polja ili električna čvrstina dielektrika je jačina električnog polja pri kojoj dolazi do električnog proboja u dielektriku.

Postoje dve klase dielektrika. Prvu klasu čine materije čiji su molekuli tako simetrično načinjeni od elementarnih nosilaca naelektrisanja da je u odsustvu spoljašnjeg električnog polja električni dipolni momenat jednak nuli. To su dielektrici sa nepolarnim molekulima, na primer CO_2 , N_2 , H_2 . Druga klasa dielektrika sadrži materije čiji je električni dipolni moment postoji čak i kad spoljašnje električno polje ne postoji. To su dielektrici sa polarnim molekulima, na primer SO_2 , H_2S , H_2O .

24 - Polarizacija dielektrika

♦ Polarizaciju dielektrika sa nepolarnim molekulima je moguće objasniti na primeru atoma elementa čiji je redni broj u periodičnom sistemu elemenata Z . Naelektrisanja jezgra i elektronskog omotača su $\pm Ze$. U spoljašnjem električnom polju ovaj atom postaje električni dipol momenta $\vec{p} = Ze\vec{d} = q\vec{d}$, čija osa je u pravcu polja. Makroskopska veličina koja opisuje polarizovanost materije je vektor polarizacije tj. zbir svih električnih momenata za posmatrani deo zapremine, tj. element zapremine ΔV koju zauzima dielektrik je moguće u električnom smislu zameniti dipolnim momentom $\vec{p}$.

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p} = \frac{1}{\Delta V} \sum q\vec{d} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{P} \Delta V$$

Oдавде sledi jedinica za jačinu vektora polarizacije, koja očigledno ima prirodu površinske gustine naelektrisanja. Pošto je dipolni momenat srazmeran jačini električnog polja biće to i vektor polarizacije tj. vektori $\vec{P}$ i $\vec{E}$ su kolinearni, i α je koeficijent polarizacije.

$$[P] = \frac{C}{m^2}$$

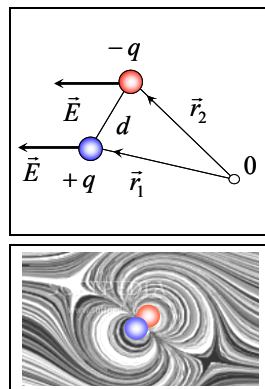
$$\vec{P} = \alpha \vec{E}$$

♦ Polarizaciju dielektrika sa polarnim molekulima je moguće objasniti na primeru jednog električnog dipola čiji je električni moment $\vec{p}$ stalan. Na dipol deluje sila $\vec{F}$. Kad je polje homogeno, $\vec{E}_2 = \vec{E}_1 = \vec{E}$, sila je jednaka nuli,

$$\vec{F} = q\vec{E}_2 - q\vec{E}_1.$$

Na dipol deluje spreg sila čiji moment koji teži da dipol okrene tako da se osa dipola i pravac polja podudaraju.

$$\vec{M} = q(\vec{r}_1 \times \vec{E} - \vec{r}_2 \times \vec{E}) = q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{E} = q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

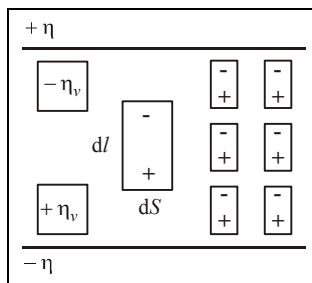


Iz izraza za moment sprega sila je jasno da izbor koordinatnog početka ne utiče na rezultat.

Eksperimentalno je dokazano da i kod dielektrika sa polarnim molekulima, mada ne u svim slučajevima, vektor polarizacije ostaje kolinearan sa vektorom spoljašnjeg električnog polja ali do određenih jačina. Nakon što jačina spoljašnjeg električnog polja postane veća od neke vrednost, koja zavisi od vrste dielektrika, dolazi do efekta zasićenja. Takve materije ostaju trajno polarisane i nazvane su elektreti. Uopšte, dielektrici mogu biti linearni (osobine ne zavise od jačine spoljašnjeg električnog polja), i nelinearni. Takođe, mogu biti homogeni (osobine se ne menjaju duž pravca polja) i nehomogeni. Dielektrici mogu biti izotropni (osobine u svim pravcima su iste) i anizotropni.

25 - Površinska gustina vezanih naelektrisanja

Polazeći od prethodnih razmatranja moguće je objasniti makroskopske efekte koje stvara prisustvo linearne, homogene i izotropne dielektrične materije u spoljašnjem električnom polju. U ravnom kondenzatoru između čijih elektroda je prazan prostor i kod kog su dimenzije elektroda znatno veće od međusobnog rastojanja uspostavljeno je, vrlo približno, homogeno električno polje,



Jačina električnog polja je $E_0 = \eta / \epsilon_0$, gde je η površinska gustina slobodnih naelektrisanja. Kondenzator je isključen sa izvora napajanja i u međuelektrodni prostor u celini se unosi dielektrična materija. U materiji se stvaraju nizovi elementarnih električnih dipola čije su ose približno ili sasvim tačno u pravcu električnog polja. Naelektrisanja na krajevima dipola se međusobno neutrališu jer su suprotnog znaka. Ostaju samo naelektrisanja na krajevima spoljašnjih dipola. To su vezana naelektrisanja. Svaki element zapremine $dV = dS dl$ je elementarni električni dipol čiji je moment, $dP = PdV = PdS dl$. Moment elementarnog električnog dipola je $dP = dq_v dl$, pa iz poslednja dva izraza sledi izraz za jačinu

vektora polarizacije. $P = \frac{dq_v}{dS} = \eta_v = \alpha E$ Zbog pojave vezanih naelektrisanja uz elektrode kondenzatora stvara se dodatno električno polje koje je istog pravca ali suprotnog smera u odnosu na spoljašnje električno polje, $E_v = \eta_v / \epsilon_0$, odnosno

$$E = E_0 - E_v = \frac{1}{\epsilon_0}(\eta - \eta_v) = \frac{1}{\epsilon_0}(\eta - P) = \frac{1}{\epsilon_0}(\eta - \alpha E) \Rightarrow E = \frac{\eta}{\epsilon_0 + \alpha}.$$

Koeficijent polarizacije α je moguće predstaviti u vidu proizvoda $\alpha = \epsilon_0 \chi_e$, gde je χ_e neimenovan broj nazvan električna susceptibilnost. Tako se dobija izraz iz kog je jasno da imenilac mora biti neka nova dielektrična konstanta.

$$E = \frac{\eta}{\epsilon_0 + \alpha} = \frac{\eta}{\epsilon_0 + \epsilon_0 \chi_e} = \frac{\eta}{\epsilon_0(1 + \chi_e)} = \frac{\eta}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\eta}{\epsilon} \Rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r, E = \frac{\eta}{\epsilon}$$

Sa ϵ_r je obeležena relativna dielektrična konstanta, i sa ϵ dielektrična konstanta dielektrika.

Kad se dobijeni rezultat uporedi sa izrazom za jačinu električnog polja u kondenzatoru bez dielektrika slede odnosi koje su zapravo otkrili *Cavendish* i *Faraday*.

$$\frac{E}{E_0} = \frac{U}{U_0} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_r}$$

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r$$

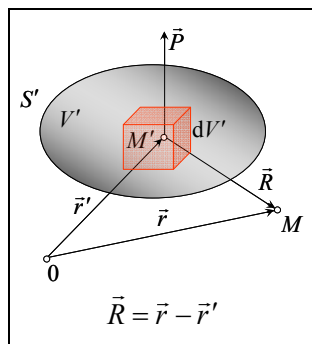
26 - Zapreminska gustina vezanih naelektrisanja

Potencijal dipola koji predstavlja element polari-
zovanog dielektrika (videti: tačkasti simetrični dipol)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{r^3}, \quad (d\vec{p} = \vec{P} dV)$$

pa je potencijal svih dipola koji zamenjuju dielek-
tričnu materiju

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} dV'.$$



Za izračunavanje poslednjeg izraza potrebno je krenuti od identiteta

$$\text{div}_{|M'} \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) = \vec{P} \cdot \text{grad}_{|M} \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \text{div}_{|M'} \vec{P} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} + \frac{1}{R} \text{div}_{|M'} \vec{P}$$

gde se gradijent recipročne vrednosti rastojanja računa u tački u kojoj se
potencijal određuje, a divergencija vektora polarizacije računa na mestu izvora.
Tako je

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \text{div}_{|M'} \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) dV' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{1}{R} \text{div}_{|M'} \vec{P} dV',$$

ili kada se na prvi integral primeni teorema divergencije

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{R} \vec{P} \cdot d\vec{S} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{1}{R} \text{div} \vec{P} dV',$$

gde je indeks uz divergenciju sada izostavljen kao suvišan jer izvori vektora
polarizacije su samo u zapremini koja se posmatra. Kad je cela zapremina
ispunjena dielektrikom integrali po površinama diskontinuiteta (koje bi trebalo
isključiti) ne postoje.

U površinskom integralu podintegralna funkcija
brže teži nuli nego što površina teži beskonačnosti,
pa je vrednost ovog integrala jednaka nuli.

Sa druge strane, izraz za određivanje potencijala koji
stvara bilo koja zapreminska gustina naelektrisanja
je od ranije dobro poznat.

Upoređivanjem se dobija izraz za zapreminsku
gustinu vezanih naelektrisanja.

Slobodna i vezana naelektrisanja ravnopravno
stvaraju potencijal i električno polje.

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{1}{R} \text{div} \vec{P} dV'$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{1}{R} \rho dV'$$

$$\rho_v = -\text{div} \vec{P}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho + \rho_v}{R} dV'$$

U homogeno polarizovanom dielektriku nema viškova naelektrisanja istog znaka.

27 - Maxwellov postulat = treća Maxwellova jednačina

Električno polje koje stvaraju vezana naelektrisanja superponira se na električno polje koje stvaraju slobodna naelektrisanja pa u diferencijalni oblik *Gaussovog* zakona treba uključiti obe zapreminske gustine naelektrisanja.

Maxwell je definisao vektor $\vec{D}$ i nazvao ga vektor električne indukcije ili vektor dielektričnog pomeraja.

Uvođenjem ovog vektora sledi generalizacija *Gaussovog* zakona poznata kao *Maxwellov* postulat ili treća *Maxwellova* jednačina. Izlazni fluks vektora električne indukcije kroz zatvorenu površinu S koja ograničava zapreminu V jednak ukupnoj količini slobodnih naelektrisanja koja su obuhvaćena tom površinom i to bez obzira da li je dielektrik homogen ili nije.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_v)$$

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Diferencijalni oblik

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Integralni oblik

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

U vezi sa uvođenjem vektora električne indukcije treba dati napomene koje slede.

♦ Izvori i ponori polja vektora električne indukcije su isključivo slobodna naelektrisanja, što znači da su linije polja neprekinute kroz dielektrik bez obzira na nehomogenosti. Ova činjenica je od velikog značaja pri određivanju električnog polja u heterogenim dielektricima.

♦ U opštem slučaju polje vektora električne indukcije je vrtložno jer je

$$\operatorname{rot} \vec{D} = \operatorname{rot} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \epsilon_0 \operatorname{rot} \vec{E} + \operatorname{rot} \vec{P} = \operatorname{rot} \vec{P}.$$

♦ Kod linearnih i izotropnih dielektrika vektori $\vec{E}$, $\vec{P}$ i $\vec{D}$ su kolinearni, pa je

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \alpha \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}.$$

♦ Kad je dielektrik homogen dielektrična konstanta ne zavisi od koordinata i *Maxwellov* postulat se može napisati u obliku koji formalno isti kao i *Gaussov* zakon u diferencijalnom obliku, s tim što umesto ϵ_0 stoji ϵ .

$$\operatorname{div} \vec{D} = \epsilon \operatorname{div} \vec{E} = \rho, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

♦ *Poissonova* jednačina će takođe imati formalno isti oblik. Kako su osnovne diferencijalne jednačine polja u dielektriku formalno iste sa onima u slobodnom prostoru, to moraju biti i sva rešenja elektrostatičkih problema koja se iz njih dobijaju.

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

28 - Granični uslovi na razdvojnoj površini dva dielektrika

Promenu jačine i pravca vektora električne indukcije na razdvojnoj površini dva dielektrika moguće je odrediti primenom *Maxwellovog* postulata u integralnom obliku. Neka zatvorena cilindrična površina ima osnovice koje leže sa različitih strana ove površine, i neka su tako male da je vektor električne indukcije moguće smatrati konstantnim.

U opštem slučaju na razdvojnoj površini postoji površinska gustina slobodnih naelektrisanja η . Kad visina cilindrične površine teži nuli fluks vektora električne indukcije postoji samo kroz osnovice, pa sledi rezultat za razliku normalnih komponenti ovog vektora. Kad na razdvojnoj površini ne postoje slobodna naelektrisanja normalne komponente vektora električne indukcije su jednake. Iz graničnog uslova za normalne komponente vektora električnog polja sledi granični uslov za izvode potencijala u pravcu normale.

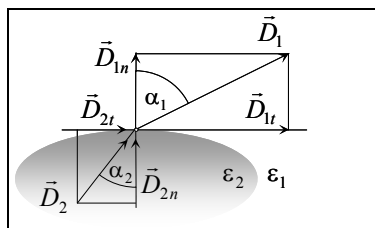
Cirkulacija vektora električnog polja je jednaka nuli. Neka pravougaona kontura ima dve stranice sa različitih strana površine razdvajanja. Ako visina konture teži nuli sledi da su tangencijalne komponente vektora električnog polja međusobno jednake. Na samoj razdvojnoj površini i potencijali su jednaki.

Iz graničnih uslova neposredno sledi odnos uglova koje zaklapaju vektori elektrostatičkog polja. To je zakon prelamanja linija polja.

Pri prolasku kroz graničnu površinu vektori električnog polja i električne indukcije se skokovito menjaju,

$$E_{1n} - E_{2n} = \left(1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right) E_{1n}, \quad D_{1t} - D_{2t} = \left(1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) D_{1t}.$$

Ako je $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$ tada $\alpha_2 \rightarrow \pi/2$ i $\alpha_1 \rightarrow 0$ što je slučaj i kod provodnika. Analogija je samo formalna jer dielektrična konstanta provodnika približno ista kao za vazduh. Međutim, u svim formulama koje važe za dielektričnu sredinu ϵ može se staviti $\epsilon \rightarrow \infty$ da bi se dobile formule koje važe za provodnu sredinu.



$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q = \int_{\Delta S} \eta dS = \eta \Delta S$$

$$D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S = \eta \Delta S$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \eta$$

$$\begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n} \\ \epsilon_1 \vec{E}_{1n} &= \epsilon_2 \vec{E}_{2n} \\ \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{aligned}$$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l = 0$$

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} &= \frac{D_{2t}}{\epsilon_2} \\ \varphi_1 &= \varphi_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Primer 26 - Vezana naelektrisanja oko provodne lopte

Neka se usamljena naelektrisana provodna lopta poluprečnika a nalazi u homogenom dielektriku čija je dielektrična konstanta ε . Vektor polarizacije je

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} = \frac{q(\varepsilon - \varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon} \frac{\hat{r}}{r^2},$$

gde je $q = \eta 4\pi a^2$ ukupno slobodno naelektrisanje na lopti, koje je jasno raspoređeno po površini lopte. Kako je $\text{div}(\hat{r}/r^2) = \text{div}(\vec{r}/r^3) = 0$ to neposredno sledi da je zapreminska gustina vezanih naelektrisanja jednaka nuli, $\rho_v = -\text{div} \vec{P} = 0$. Površinska gustina vezanih naelektrisanja koja su suprotnog znaka biće

$$\eta_v = -P = \frac{q(\varepsilon_0 - \varepsilon)}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{a^2},$$

tako da je ukupna količina naelektrisanja uz površinu lopte

$$q_{tot} = q + \eta_v 4\pi a^2 = q \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon},$$

odakle sledi da je električno polje

$$\vec{E} = \frac{q_{tot}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{\hat{r}}{r^2},$$

što je poznat rezultat.

Primer 27 - Određivanje dielektrične konstante dielektrika

Sferni kondenzator je do polovine napunjen tečnim dielektrikom i priključen na napon U_d . Nakon isključivanja izvora napajanja tečni dielektrik se ispusti. Izmereni napon između elektroda sada ima vrednost U_0 . Potrebno je odrediti vrednost relativne dielektrične konstante.

Primenom *Maxwellovog* postulata u integralnom obliku dobija se izraz za kapacitivnost sfernog kondenzatora sa dielektrikom čija je dielektrična propustljivost ϵ .

$$C = 4\pi\epsilon \frac{ba}{b-a},$$

gde su a i b poluprečnici unutrašnje i spoljašnje elektrode.

Kad je kondenzator do polovine ispunjen dielektrikom električno polje i dalje ima radijalni karakter, a integracija se posebno vrši za svaku od polovina zamišljene sfere. Tako se dobija da je kapacitivnost ovakvog kondenzatora ekvivalentna kapacitivnosti redne veze dva kondenzatora, tj.

$$C_d = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon \frac{ba}{b-a} + \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 \frac{ba}{b-a} = \frac{1}{2} (C + C_0) = \frac{1}{2} (1 + \epsilon_r) C_0.$$

Kako je pre ispuštanja tečnog dielektrika kondenzator isključen sa izvora napajanja to znači da količine naelektrisanja ostaju nepromenjene,

$$q_d = C_d U_d = C_0 U_0 = q_0$$

Zamenom izraza za C_d iz poslednje jednakosti sledi

$$\epsilon_r = 2 \frac{U_0}{U_d} - 1.$$

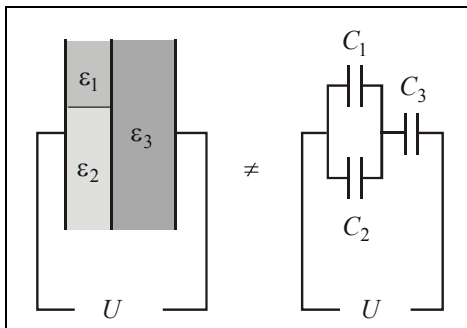
Da li je $U_0 > U_d$?

Zadatak 27.1 - Ravan kondenzator čije elektrode su na međusobnom rastojanju d priključen je na izvor napajanja napona U . Kad se u međuelektrodni prostor ubaci pločica debljine $d/2$ čija je relativna dielektrična konstanta ϵ_r , u preostalom vazдушnom delu jačina električnog polja poveća se k puta u odnosu na prethodnu vrednost. Odredit vrednost ϵ_r .

Primer 28 - Mešovita veza ravnih kondenzatora ?

Ravan kondenzator sa troslojnim dielektrikom kao na slici nije moguće predstaviti kao mešovitu vezu tri kondenzatora. Pošto je polje normalno na površine elektroda može se pretpostaviti da je električno polje homogeno u svakom od slojeva. Tada bi granični uslovi na razdvojnima površinama slojeva bili:

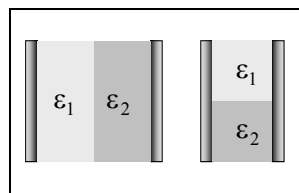
razdvojna površina	granični uslov
$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$	$E_1 = E_2$
$\epsilon_1 \epsilon_3$	$\epsilon_1 E_1 = \epsilon_3 E_3$
$\epsilon_2 \epsilon_3$	$\epsilon_2 E_2 = \epsilon_3 E_3$



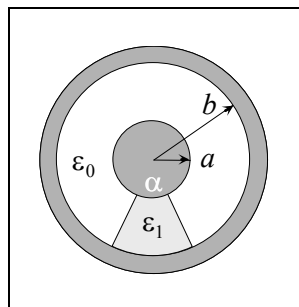
Iz poslednja dva granična uslova sledi da je $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$, što je protivurečno prvom graničnom uslovu, pa je jasno da polje u ovakvom kondenzatoru nije homogeno.

Zadatak 28.1 - Pokazati da je ravan kondenzator sa dvoslojnim dielektrikom moguće prikazati kao rednu, odnosno paralelnu vezu dva kondenzatora,

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad C_e = C_1 + C_2.$$



Zadatak 28.2 - Unutrašnji provodnik sfernog kondenzatora oslonjen je na konusni oslonac čija je dielektrična konstanta ϵ_1 . Ostali deo prostora je ispunjen vazduhom. Izvodnice oslonca su radijalne i seku se u zajedničkom centru sfernih elektroda. U poprečnom preseku, kome pripada zajednički centar, izvodnice grade ugao α . Iz činjenice da je napon između elektroda svuda isti, sledi da je električno polje u kondenzatoru radijalno i zavisi samo od rastojanja.



Granični uslov za tangencijalne komponente vektora električnog polja na razdvojnoj konusnoj površini je zadovoljen. Primenom *Maxwellovog* postulata na zamišljenu sfernu površinu poluprečnika $a \leq r \leq b$, gde su a i b poluprečnici elektroda odrediti izraze za električno polje, napon između elektroda i kapacitivnost.

Zadatak 28.3 - Odrediti električno polje, napon i kapacitivnost za slučaj koaksijalnog voda čiji je unutrašnji provodnik oslonjen na klinasti nosač. Koristiti sliku iz prethodnog zadatka za ilustraciju poprečnog preseka koaksijalnog voda.

29 - Energija elektrostatičkog polja - 2

Izraz za energiju elektrostatičkog polja u kome se nalazi N naelektrisanih tela i zapreminska gustina naelektrisanja, koji je ranije već izveden u okviru proučavanja elektrostatičkog polja u vakuumu, pokazuje da je elektrostatička energija funkcija količine naelektrisanja i potencijala.

U vakuumu

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i + \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dV$$

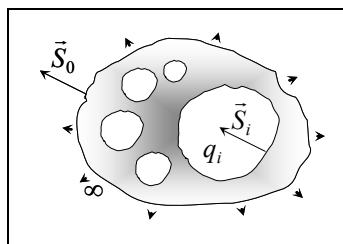
Takođe, pokazano je da je ovaj izraz moguće pomoću *Gaussovog* zakona transformisati na oblik u kome se pojavljuje samo jačina električnog polja. Na formalno isti način je moguće u razmatranje uvesti i vektor električne indukcije, ovog puta koristeći *Maxwellov* postulat.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) &= \varphi \operatorname{div} \vec{D} + \vec{D} \operatorname{grad} \varphi \\ \Downarrow \quad \Downarrow & \\ \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) &= \varphi \rho - \vec{D} \vec{E} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \int_V \rho \varphi dV &= \int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) dV + \int_V \vec{E} \vec{D} dV \\ \Downarrow & \\ \int_V \rho \varphi dV &= \oint_S \varphi \vec{D} d\vec{S} + \int_V \vec{E} \vec{D} dV \end{aligned}$$

Svako od tela u sistemu svojom graničnom površinom S_i , obuhvata količinu naelektrisanja q_i (negativan znak potiče od orijentacije normala). Sva tela zajedno su obuhvaćena površinom S_0 .

$$\begin{aligned} \oint_S \varphi \vec{D} d\vec{S} &= \oint_{S_0} \varphi \vec{D} d\vec{S} - \sum_{i=1}^N \varphi_i \oint_{S_i} \vec{D} d\vec{S} \\ \oint_{S_0} \varphi \vec{D} d\vec{S} &= 0 \quad \sum_{i=1}^N \varphi_i \oint_{S_i} \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \varphi_i q_i \end{aligned}$$

Integral po površini S_0 je jednak nuli. Ova površina se širi do beskonačnosti po zakonu r^2 , jačina električnog polja opada po zakonu r^{-2} , pa podintegralna funkcija teži nuli kao i potencijal, tj. kao r^{-1} . U tačkama u beskonačnosti potencijal je jednak nuli i ceo sistem se iz tih tačaka vidi kao tačkasto naelektrisanje.



Konačno se dobija

$$\int_V \rho \varphi dV = - \sum_{i=1}^N \varphi_i q_i + \int_V \vec{E} \vec{D} dV,$$

pa sledi i konačan izraz za energiju elektrostatičkog polja na osnovu koga je jasno da je energija lokalizovana u polju i da nosioci energije nisu naelektrisanja.

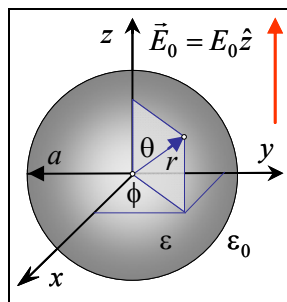
U materijalnoj sredini

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i + \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \vec{D} dV$$

30 - Dielektrična sfera u homogenom električnom polju

Čestica sfernog oblika poluprečnika a , načinjena od dielektrika propustljivosti ε , nalazi se u homogenom električnom polju $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ u vakuumu. Sferni koordinatni sistem (r, θ, ϕ) je postavljen sa početkom u centru sfere. Pošto je problem rotaciono simetričan, raspodela potencijala je određena rešenjem dvo-dimezionalne Laplaceove jednačine koja zadovoljava granične uslove na površini sfere i u beskonačnosti.



Postavka problema	
Laplaceova jednačina	Granični uslovi
$\varphi = \varphi(r, \theta)$	$\varphi _{r=a-} = \varphi _{r=a+}$
$\Delta\varphi = 0$	$\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial r} \Big _{r=a-} = \varepsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \Big _{r=a+}$
$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) = 0$	$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r, \theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta$

Uobičajeni metod za rešavanje ovakvih problema se sastoji u razdvajanju promenljivih. Rešenje za raspodelu potencijala se pretpostavlja u obliku proizvoda dve funkcije od po jedne promenljive, $\varphi = R(r)T(\theta) = RT$. Time se Laplaceova jednačina svodi na jednakost

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{T} \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dT}{d\theta} \right).$$

Kako leva strana ove jednačine zavisi samo od promenljive r , a desna strana samo od promenljive θ , jednakost je moguća samo ako su obe strane jednake istoj konstanti. Iskustvo je pokazalo da je pogodan izbor za konstantu razdvajanja $n(n+1)$, a evo i zbog čega.

Leva strana gornje jednakosti postaje Eulerova diferencijalna jednačina (Leonhard Euler 1707-1783). Rešenje se traži u obliku stepena nezavisno promenljive. To daje karakterističnu jednačinu čiji su koreni celi brojevi.

Konačno rešenje je linearna kombinacija dva partikularna rešenja.

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$$

$$R = r^k$$

$$k^2 + k - n(n+1) = 0$$

$$k_1 = n, \quad k_2 = -(n+1)$$

$$R = C_1 r^n + C_2 r^{-n-1}$$

Desna strana postaje *Legendreova* diferencijalna jednačina (*Adrien-Marie Legendre*, 1752-1833), čija su rešenja *Legendreovi* polinomi prve i druge vrste.

Drugo partikularno rešenje treba isključiti, uzimajući da je $D_2 = 0$, jer za tačke na z -osi tj. za $\cos\theta = \pm 1$ polinomi druge vrste imaju beskonačnu vrednost, a potencijal je konačna veličina.

Na velikim udaljenostima od sfere $r \rightarrow \infty$, drugi sabirak teži nuli, a potencijal mora da bude jednak potencijalu pobudnog polja,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (C_1 r^n + C_2 r^{-n-1}) P_n(\cos\theta) = -E_0 r \cos\theta$$

odakle sledi da je $n = 1$, jer je $P_1 = \cos\theta$.

Dalje treba voditi računa u kom se domenu određuje potencijal. Unutrašnjost sfere obuhvata koordinatni početak $r = 0$, pa treba uzeti $C_2 = 0$ jer je potencijal konačna veličina. Okolina sfere obuhvata i tačke u beskonačnosti pa je $C_1 = -E_0$.

$$T'' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} T' + n(n+1)T = 0$$

$$T = D_1 P_n(\cos\theta) + D_2 Q_n(\cos\theta)$$

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = \cos\theta$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

:

$$Q_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$Q_1 = \frac{\cos\theta}{2} \ln \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} - 1$$

$$Q_2 = \frac{3\cos^2\theta - 1}{4} \ln \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} - \frac{3\cos\theta}{2}$$

:

$$\varphi = (C_1 r^n + C_2 r^{-n-1}) P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi = \begin{cases} C_1 r \cos\theta, & r \leq a \\ \left(-E_0 r + \frac{C_2}{r^2}\right) \cos\theta, & r \geq a \end{cases}$$

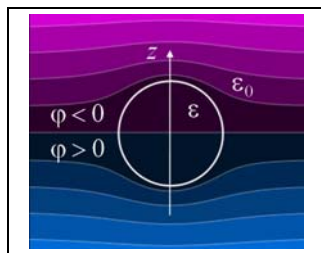
Kada se ovako dobijenim rešenjem zadovolje prvi i drugi granični uslov dobijaju se dve linearne jednačine sa dve nepoznate konstante integracije. Rešenje ovog sistema daje vrednosti za konstante integracije

$$C_1 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0,$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} a^3 E_0,$$

i konačno rešenje za funkciju raspodele potencijala.

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_i = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 r \cos\theta, & r \leq a \\ \varphi_e = -E_0 r \cos\theta + \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 r \cos\theta, & r \geq a \end{cases}$$



Kako je u sfernom koordinatnom sistemu $z = r \cos\theta$, u unutrašnjosti sfere potencijal se može predstaviti i pomoću z -koordinate.

$$\varphi_i = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 z$$

Oдавде se vidi da je u unutrašnjosti sfere električno polje homogeno, usmereno u pravcu spoljašnjeg polja i nezavisno od veličine sfere.

Sfera je homogeno polarizovana (lekcija 25),

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E},$$

pa se iz izraza za vektor polarizacije određuje električna susceptibilnost dielektrika.

U okolini sfere potencijal je jednak zbiru potencijala koji stvara primarno polje i potencijala koji potiče od indukovanih naelektrisanja. Uticaj indukovanih naelektrisanja se može zameniti pomoću električnog dipola ekvivalentnog električnog momenta.

Upoređivanjem izraza za potencijal koji stvara električni dipol (lekcija 12) i izraza za perturbovanu komponentu potencijala u okolini sfere dobija se izraz za ekvivalentni električni moment.

Površinska gustina indukovanih naelektrisanja je jednaka intenzitetu vektora polarizacije. Odatle se dobija i ukupna količina indukovanih naelektrisanja. Ovaj rezultat je od velikog značaja za projektovanje elektrostatičkih filtera.

U okolini sfere vektor električnog polja ima radijalnu i ugaonu komponentu,

$$E_{er} = \left(1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) E_0 \cos \theta, \quad E_{e\theta} = - \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) E_0 \sin \theta.$$

♦ Ako se sferna šupljina nalazi u dielektriku, na primer vazdušni mehur u transformatorskom ulju, svi izvedeni izrazi ostaju u važnosti samo što veličine ϵ i ϵ_0 treba da međusobno zamene mesta.

Polje u šupljini je većeg intenziteta nego u okolnoj polarizovanoj materiji jer je $\epsilon > \epsilon_0$.

♦ Ako je sfera savršen provodnik svi izrazi izvedeni za dielektričnu sferu ostaju u važnosti samo što treba staviti da $\epsilon \rightarrow \infty$.

$$\vec{E}_i = - \frac{d\varphi}{dz} \hat{z} = \frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 \hat{z}$$

$$\vec{P} = \frac{3\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon + 2\epsilon_0} \vec{E}_0$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}_0$$

$$\varphi_e = \varphi_0 + \varphi_p$$

$$\varphi_0 = -E_0 r \cos \theta$$

$$\varphi_p = \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 r \cos \theta$$

$$\varphi_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} r \cos \theta$$

$$p = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} a^3 E_0$$

$$\eta = P = \frac{p}{V} = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0$$

$$q = \eta S = 12\pi\epsilon_0 a^2 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0$$

$$E_{er} = - \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad E_{e\theta} = - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

$$E_i = \frac{3\epsilon}{\epsilon_0 + 2\epsilon} E_0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} = 1$$

Tako se dobijaju rezultati koj bi se inače dobili rešavanjem *Laplaceove* jednačine za spoljašni domen, $r \geq a$, ali sa graničnim uslovom koji važi za savršeno provodnu sferu,

$$\varphi|_{r=a} = 0.$$

Izraz za indukovanu količinu naelektrisanja je poznat kao *Pauthenierova* jednačina (*Marcel Pauthenier*, 1887-1972). Ustvari, sfera je i dalje električno neutralna. Polovina količine indukovanih naelektrisanja je pozitivna i nalazi se na jednoj polovi sfere. Na drugoj polovini sfere je ista količina suprotnog znaka.

♦ Efekat polarizacije se u proračun uključuje implicitno pomoću veze između osnovnih veličina električnog polja

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

koja u slučaju linearnih izotropnih dielektrika degeneriše u

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}.$$

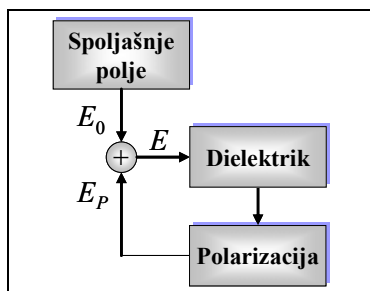
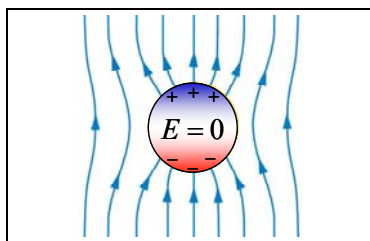
$$\varphi_i = 0$$

$$E_i = 0$$

$$E_{e\theta} = 0, \quad \text{za } r = a$$

$$E_{er} = 3 E_0 \cos \theta, \quad \text{za } r = a$$

$$q = 12\pi\epsilon_0 a^2 E_0$$



♦ Elektrostatički filteri su veoma efikasni za prikupljanje čestica vrlo malih dimenzija - nano čestica. Efikasnost prikupljanja zavisi od količine naelektrisanja na samoj čestici. Na primer, neka se radi o letećem pepelu iz fosilnih goriva. Tada je srednja veličina čestica sfernog oblika $a = 0.5 \mu\text{m}$, a dielektrična konstanta $\epsilon = 1.713\epsilon_0$. U električnom polju jačine $E_0 = 50 \text{ kV/m}$ čestica će se naelektrisati količinom naelektrisanja od pet elektrona, $q = 5e$. Metalna čestica pri istim uslovima naelektrisala bi se deset puta većom količinom naelektrisanja. Elektrostatička sila koja deluje na tako naelektrisanu česticu uvek je znatno veća od gravitacione ili centrifugalne sile.

31 - Kretanje elektrona i elektronska struja

Kada se slobodna naelektrisana čestica nađe u stranom električnom polju na nju deluje mehanička sila koja prouzrokuje kretanje. Naelektrisana čestica koja se nalazi u homogenom električnom polju, na primer između elektroda ravnog kondenzatora, iz stanja mirovanja počinje da se kreće konstantnim ubrzanjem ka elektrodi sa naelektrisanjem suprotnog znaka.

Pri jediničnom naponu elektron stiže na drugu elektrodu brzinom od oko 590 km/s.

Dinamika Kinematika	Rad Energija
$F = ma$ $F = qE$	$W = qU = qEd$
$v^2 = v_0^2 + 2ad$	$W = \frac{1}{2}mv^2 - W_0$
$v_0 = 0$	$W_0 = 0$

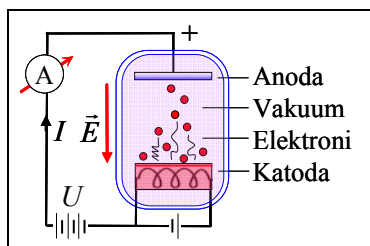
$$v = \sqrt{\frac{2q}{m}Ed} = \sqrt{\frac{2q}{m}U}$$

$$v = 0.59 \cdot 10^6 \sqrt{U} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kretanje elektrona formira električnu struju. Dalje izlaganje predstavlja uvod u sledeću oblast koja se bavi upravo proučavanjem stalnih električnih struja.

Elektroni privučeni privlačnom silom atomskog jezgra katodu ne napuštaju spontano. Katodu treba pobuditi da bi emitovala elektrone. To se postiže na nekoliko načina. Jaka električna polja u okolini katode mogu da iščupaju elektrone sa površine - emisija polja. Neki metali emituju elektrone kada su osvetljeni određenim talasnim dužinama - fotoelektrični efekat. Snop ubrzanih elektrona u sudaru sa metalnom površinom iz nje izbacuje nove elektrone - sekundarna emisija. Povećavanje temperature katode ubrzava termičko kretanje i elektroni napuštaju površinu - termojonska emisija. Najjednostavniji primer je uspostavljanje elektronske struje između zagrejene katode i anode u vakuumu. Uređaj je nazvan termojonska vakuumaska dioda.

♦ Kada se katoda zagreje dolazi do formiranja elektronskog oblaka koji sprečava dalju emisiju elektrona. Manji broj elektrona ipak ima dovoljno energije da napusti oblak i stigne do suprotne elektrode čak i ako je ona na nultom ili negativnom potencijalu. To je oblast uspostavljanja anodne struje.



♦ Sa porastom pozitivnog potencijala na anodi sve veći broj elektrona napušta katodu i gustina elektronskog snopa između elektroda je sve veća. Formirana je konvekciona struja. To je oblast prostornog naelektrisanja.

♦ Sa još većim anodnim potencijalima dolazi do zasićenja i gustina struje zavisi samo od temperature katode i veoma malo od čupanja elektrona usled jakog električnog polja. To je oblast zasićenja.

32 - Elektronska struja u vakuumskoj diodi

Katoda i anoda nalaze se na međusobnom rastojanju d . U međuprostoru postoji stalna zapreminska gustina elektrona $\rho < 0$. Raspodela potencijala je određena rešenjem *Poissonove* jednačine, u ovom slučaju samo po jednoj koordinati, koje zadovoljava granične uslove na površinama elektroda. Desna strana jednačine je pozitivna.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dy^2} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \varphi &= 0 \quad \text{za } y = 0 \\ \varphi &= U \quad \text{za } y = d \\ \frac{d\varphi}{dy} &= 0 \quad \text{za } y = 0 \end{aligned} \right\}$$

Zapreminska gustina naelektrisanja može se izraziti preko gustine struje J i brzine elektrona v . Sa druge strane brzina elektrona određena je (prethodna lekcija) priraštajem kinetičke energije koji je jednak uloženom radu sila električnog polja.

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{J}{v} \\ v &= \sqrt{\frac{2e}{m}} \sqrt{\varphi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{J}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \quad \left| \quad \frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \sqrt{\varphi} \frac{d^2\varphi}{dy^2} &= B, \\ B &= \frac{J}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \end{aligned} \right. \right.$$

Za rešavanje dobijene diferencijalne jednačine u literaturi su prikazani veoma složeni postupci. Međutim, ova jednačina može veoma elegantno da se reši ako se rešenje pretpostavi u obliku stepena nezavisno promenljive, čime je treći granični uslov automatski zadovoljen.

$$\varphi = C y^n, \quad \sqrt{\varphi} = C^{\frac{1}{2}} y^{\frac{n}{2}}, \quad \frac{d^2\varphi}{dy^2} = n(n-1) C y^{n-2}.$$

Kada se pretpostavljeno rešenje zameni u diferencijalnu jednačinu dobija se karakteristična jednačina.

$$\left\| n(n-1) C^{\frac{3}{2}} y^{\frac{n}{2}+n-2} = B \right.$$

Da bi i leva strana jednačine bila jednaka konstanti neophodno je da eksponent bude jednak nuli. Odatle se dobijaju nepoznati eksponenti i konstanta u pretpostavljenom rešenju, a i konačno rešenje.

$$\frac{n}{2} + n - 2 = 0, \quad n = \frac{4}{3}, \quad C = \left(\frac{3}{2} \sqrt{B} \right)^{\frac{4}{3}}, \quad \varphi = \left(\frac{3}{2} \sqrt{B} \right)^{\frac{4}{3}} y^{\frac{4}{3}} + D.$$

Konstanta integracije D je na osnovu prvog graničnog uslova jednaka nuli.

Iz drugog graničnog uslova moguće je dobiti izraz za konstantu B . Tako se konačno dobija i izraz za potencijal.

$$\left\| U = \left(\frac{3}{2} \sqrt{B} \right)^{\frac{4}{3}} d^{\frac{4}{3}} \Rightarrow \sqrt{B} = \frac{2}{3d} U^{\frac{3}{4}} \right.$$

Konstanta B je uvedena na početku razmatranja da bi se pojednostavio zapis diferencijalne jednačine. Ova konstanta je srazmerna gustini elektronske struje.

$$\varphi = U \left(\frac{y}{d} \right)^{\frac{4}{3}}$$

Tako za ovu konstantu postoje dva izraza,

$$B = \frac{J}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \Leftrightarrow B = \frac{4}{9d^2} U^{\frac{3}{2}},$$

čijim izjednačavanjem se dobija veza između gustine struje i anodnog napona.

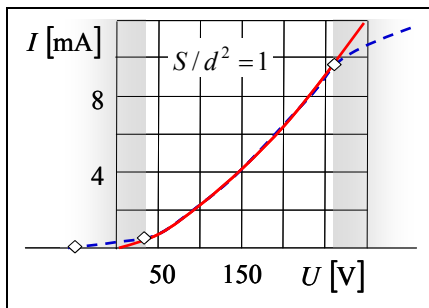
Kada je poznata površina elektroda S umesto gustine struje može da se upotrebi jačina struje, ali zakonitost ostaje ista. Zakon proticanja struje kroz diodu poznat je kao zakon stepena tri polovine. Do ovog zakona nezavisno su došla dva naučnika, pa je poznat i kao zakon *Child-Langmuira*.

$$J = \frac{4\varepsilon_0}{9d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} U^{\frac{3}{2}}$$

$$I = k U^{\frac{3}{2}}$$

Zakon stepena tri polovine ili statička karakteristika diode pokazuje uticaj prostornog naelektrisanja na tok struje elektrona u diodi. Da nema prostornog naelektrisanja (videti primer 11.1) raspodela potencijala bi bila linearna,

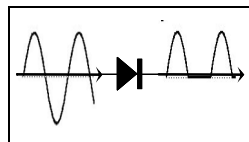
$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0 \Rightarrow \varphi = U \frac{y}{d}.$$



Iz linearne raspodele potencijala sledi i linearna veza između struje i napona, tj. *Ohmov* zakon. U uslovima stimulisane emisije elektrona tj. postojanja zapreminske gustine naelektrisanja u prostoru predstavlja nelinearnu otpornost.

Izvedeni zakon ne pokriva oblast uspostavljanja struje i oblast zasićenja (videti prethodnu lekciju) ali ove oblasti nisu od interesa za praktičnu primenu. U praksi vakuumaska dioda je prekidački element.

Pri negativnim anodnim naponima struja ne protiče. Ako se na anodu dovede naizmenični napon, struja će proticati samo za vreme pozitivnih poluperioda. Prema tome dioda služi za ispravljanje napona.

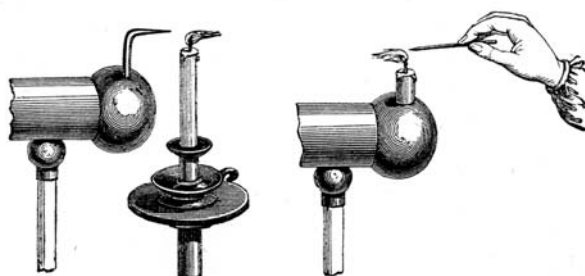


I pored toga što je zakon izveden za ravne elektrode može se pokazati da važi i za koaksijalne cilindrične elektrode. Vakumske cevi su se tako uglavnom i proizvodile, sve dok ih nisu potisnuli poluprovodnički elementi.



Ovde se završava proučavanje elektrostatičnog polja i počinje proučavanje stacionarnog električnog polja i pojava koje ga prate.

PRILOZI



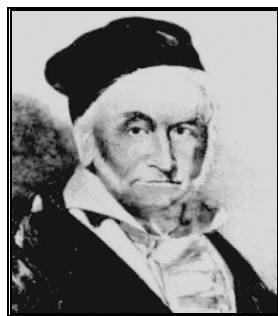
O internacionalnom sistemu jedinica = SI

Gauss, Carl Friedrich (1777-1855)

Nemački astronom, fizičar i matematičar. Proučavao je teoriju grešaka, optiku i elektromagnetizam. Postavio je osnove diferencijalne geometrije i mogućnost neeuclidovske geometrije. Tvorac je apsolutnog sistema jedinica u kome svaka fizička veličina može da se opiše pomoću mase, dužine i vremena.

Jedinica za magnetnu indukciju koja je uvođenjem SI zamenjena jedinicom tesla (T),

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gs}.$$



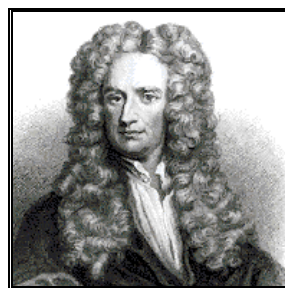
Gauss (Gs)

Newton, Isaac (1642-1727)

Engleski fizičar, matematičar i astronom. Osnivač klasične mehanike i više matematike. Postavio je zakon opšte gravitacije i tri zakona kretanja, i matematički izveo *Keplerove* zakone. *Matematički principi filozofije prirode* smatra se jednim od najznačajnijih dela koja su ikada napisana.

U SI izvedena jedinica za silu,

$$N = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$$



Njutn (N)

Joule, James (1818-1890)

Engleski fizičar koji je proučavao oslobađanje toplote u provodnicima kroz koje protiče električna struja. Proučavanja su uobličena kroz poznati *Jouleov* zakon ili efekat. Zagrevanje provodnika usled proticanja električne struje su poznati *Jouleovi* gubici.

U SI izvedena jedinica za rad, energiju ili količinu toplote,

$$J = N \text{ m} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$



Džul (J)

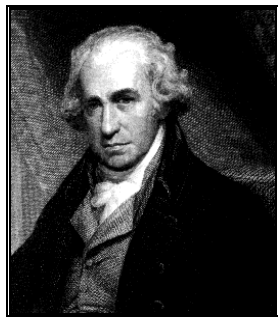
Watt, James (1736-1819)

Škotski matematičar i inženjer. Poznat po parnoj mašini. 1782. godine osnovao je prvu fabriku parnih mašina. Njegovim pronalaskom počela je industrijska revolucija i jedna nova epoha.

U SI izvedena jedinica za snagu,

$$W = \frac{J}{s}.$$

Danas je uobičajeno da se rad električne struje izražava kao vat-čas.

**Vat (W)****Andre - Marié Ampère (1775 - 1836)**

Francuski fizičar i matematičar, otac elektrodinamike. Na osnovu *Örstedovih* eksperimenata proučio uzajamno dejstvo električnih struja (*Ampèrov* zakon). Nazvan je *Newtonom* elektriciteta.

U SI osnovna jedinica za jačinu električne struje.

Električna struja jačine 1A koja protiče u dva paralelna neograničena provodnika zanemarljivog poprečnog preseka koji su na rastojanju od jednog metra u vakuumu prouzrokuje silu od $2 \cdot 10^{-7}$ N/m.

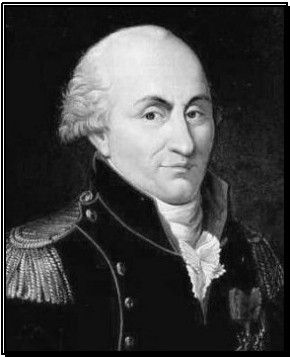
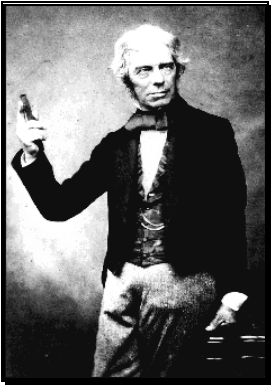
**Amper (A)****Volta, Alessandro (1745-1827)**

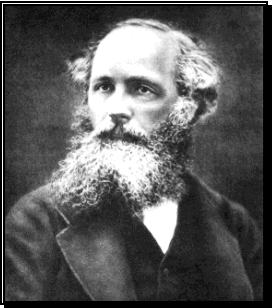
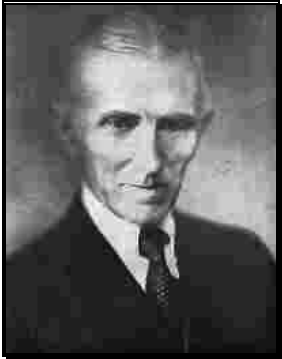
Italijanski fizičar na čiji je naučni rad uticao pronalazak *Luigija Galvanija* koji je ustanovio da se žablji kraci pri dodiru sa metalnim predmetom grče. Volta je protumačio da do te pojave dolazi usled naelektrisanja dva metala kada je između njih elektrolit. Konstruisao je prvu elektrostatičku mašinu, galvanski element, bateriju galvanskih elemenata (*Volta*in stub) i drugo.

U SI izvedena jedinica za elektromotornu silu, električni potencijal i električni napon.

$$V = \frac{J}{sA} = \frac{kg \ m^2}{s^3 \ A}$$

**Volt (V)**

Ohm, Georg Simon (1787-1854) Nemački fizičar poznat po otkriću odnosa jačine električne struje i elektromotorne sile. Rezultati njegovih proučavanja, a pre svega određivanje otpornosti u električnom kolu su doveli do poznatog <i>Ohmovog zakona</i>. U SI izvedena jedinica za električnu otpornost. $\Omega = \frac{V}{A} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3 \text{A}^2}$	 Om (Ω)
Coulomb, Charles de (1738-1806) Francuski oficir inženjerije čija su otkrića osnova za proučavanje elektrostatike. U svoj 56. godini otišao je u penziju, a već deset godina je bio član Akademije nauka i već je završio svoje delo o elektromagnetizmu. Otkrio je zakone interakcije naelektrisanih tela i magnetnih masa (analogno <i>Newtnovom zakonu gravitacije</i>) koji su kasnije nazvani po njemu. U SI izvedena jedinica za količinu naelektrisanja. $C = A s$	 Kulon (C)
Faraday, Michael (1791-1867) Engleski samouki fizičar koji je radeći kao laborant kod poznatog naučnika <i>Davya</i> otkrio jedan od fundamentalnih zakona elektromagnetike - elektromagnetnu indukciju. Mnogim pojavama i pojmovima dao je nazive, kao što su : elektroliza, samoindukcija, anoda, katoda i još mnogo toga. U SI izvedena jedinica za električnu kapacitivnost .	 Farad (F)

Maxwell, James Clarck (1831-1879) Škotski fizičar koga smatraju osnivačem kinetičke teorije gasova. Formuliseo je zakon o raspodeli brzina molekula gasa. Na osnovu <i>Faradayevih</i> eksperimenata formirao je četiri jednačine na kojima bazira savremena teorija elektromagnetnih polja. Dokazao je da je svetlost elektromagnetna pojava. Jedinica za magnetni fluks $M = \frac{Gs}{cm^2},$ je uvođenjem SI ukinuta i zamenjena jedinicom veber (Wb)	 Maksvel (M)
Ørsted, Christian (1777-1851) Poznati danski prirodnjak i lekar. Otkrio je postojanje magnetnog polja u okolini provodnika kroz koji protiče električna struja. Sa eksperimentom iz 1920. godine odmah je bio upoznat <i>Faraday</i> i to je imalo presudan uticaj na eksperimente <i>Ampéra</i> i razvoj <i>Maxwell-Faradayeve</i> elektromagnetne teorije. Jedinica za merenje jačine magnetnog polja koja je uvođenjem SI ukinuta.	 Ersted (est)
Tesla, Nikola (1856-1943) Srpski naučnik koji je dao takve doprinose na polju elektromagnetike bez koje bi danas cela tehnologija bila nezamisliva. Naizmenične struje, polifazne struje, obrtno magnetno polje, visoke frekvencije, bezžični prenos podataka, su samo kap vode u okeanu Teslinih pronalazaka. Za otkriće bezžičnog prenosa <i>Nobelova</i> nagrada nepravedno je dodeljena biznismenu i fizičaru Markoniju. U SI izvedena jedinica za magnetnu indukciju. $T = \frac{N}{Am} = \frac{kg}{As^2}$	 Tesla (T)

Weber, Vilhelm Eduard (1804-1891)

Nemački fizičar pronalazač elektromagnetnog telegrafa. Postavio prvi apsolutni sistem fizičkih jedinica.

U SI izvedena jedinica za magnetni fluks,

$$\text{Wb} = \text{Tm}^2 = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A s}^2}.$$

$$\text{Wb} = 10^8 \text{ M},$$

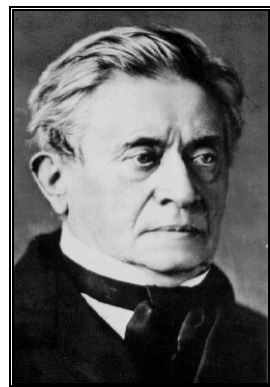
gde je M (Maksvel) takođe jedinica za magnetnu indukciju koja je ukinuta uvođenjem SI sistema.

**Veber (Wb)****Henry, Josef (1797-1878)**

Američki fizičar koji je postavio temelje za primenu elektromagnetne indukcije u industriji i tehnici. Otkrio je pojavu samoindukcije.

U SI izvedena jedinica za induktivnost (koeficijent indukcije)

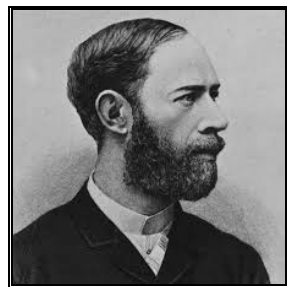
$$\text{H} = \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A}^2 \text{s}^2}$$

**Henri (H)****Hertz, Heinrich Rudolf (1857-1894)**

Nemački fizičar koji je eksperimentalno dokazao *Maxwellovu* teoriju elektromagnetnog polja, pre svega postojanje elektromagnetnih talasa i elektromagnetnu prirodu svetlosti. Za potrebe svojih eksperimenata konstruisao je oscilator koji i danas služi kao osnova pri proučavanju elektromagnetnih zračenja.

U SI izvedena jedinica za frekvenciju oscilacija.

$$\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$$

**Herc (Hz)**

Neke fizičke i matematičke konstante

Fizička konstanta	Oznaka	Vrednost i jedinica
Elementarno naelektrisanje	e	$(1.60219 \pm 0.00007)10^{-19} \text{ C}$
Masa elektrona u mirovanju	m_e	$(9.10956 \pm 0.00005)10^{-31} \text{ kg}$
Poluprečnik elektrona	r_e	$2.81793 \pm 0.00001)10^{-15} \text{ m}$
Masa protona u mirovanju	m_p	$(1.67261 \pm 0.00001)10^{-27} \text{ kg}$
Masa neutrona u mirovanju	m_n	$(1.67492 \pm 0.00001)10^{-27} \text{ kg}$
Permitivnost vakuumu	ϵ_0	$(8.85419 \pm 0.00002)10^{-12} \text{ F/m}$
Permeabilnost vakuumu	μ_0	$1.256637 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$
Brzina EM talasa u vakuumu	c	$(2.997925 \pm 0.000003)10^8 \text{ m/s}$
Standardna gravitacija	g	9.80665 m/s^2
Gravitaciona konstanta	γ	$(6.6732 \pm 0.0031)10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$
--	--	---

$\pi = 3.141593$ $e = 2.718282$ $\sqrt{2} = 1.414213$ $\sqrt{3} = 1.732051$ $\sqrt{5} = 2.236068$ $\log 2 = 0.30103$ $\log 3 = 0.47712$ $\log e = 0.43429$ $\ln 2 = 0.693147$ $\ln 3 = 1.098612$	$\ln 5 = 1.609438$ $\ln 10 = 2.302585$ $\pi^2 = 9.869604$ $1/\pi = 0.31831$ $3\pi/2 = 4.71239$ $4\pi/3 = 4.18879$ $\sqrt{\pi} = 1.772454$ $\ln \pi = 1.14473$ $e^\pi = 23.14069$ $e^{-\pi} = 0.043214$
---	---

Kritično električno polje je ono pri kome dolazi do proboja u dielektriku pri čemu dielektrik u trenutku proboja postaje provodan.

Materija	ϵ_r	$E_{kr} [\text{kV/cm}]$
Vazduh	1.0006	25 - 30
Staklo	2.0 - 16	100 - 400
Trafo ulje	2.2 - 2.4	145 - 155
Papir	2.5 - 3.5	190 - 210
Guma	2.0 - 2.5	200 - 400

Pravougli krivolinijski koordinatni sistemi

Generalisane koordinate

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

Element dužine, površine i zapremine

$$d\vec{l} = h_u du \hat{u} + h_v dv \hat{v} + h_w dw \hat{w}$$

$$d\vec{S} = h_v h_w dv dw \hat{u} + h_u h_w du dw \hat{v} + h_u h_v du dv \hat{w}$$

$$dV = h_u h_v h_w dv dw du$$

Prostorni izvodi

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \hat{u} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \hat{v} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \hat{w}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w E_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w E_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v E_w) \right)$$

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u E_u & h_v E_v & h_w E_w \end{vmatrix}$$

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) \right)$$

Polarni cilindrični koordinatni sistem

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_z = 1$$

Sferni koordinatni sistem

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin \theta.$$

Nabla operator

Hamiltonov ili nabla operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

Generalisani nabla operator

$$\nabla = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S d\vec{S}$$

Prostorni izvodi

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$$

$$\text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E}$$

$$\nabla(\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

$$\nabla(\nabla \times \vec{E}) = 0$$

$$\Delta \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{E})$$

Integralne relacije

$\int_V \nabla \varphi dV = \oint_S \varphi d\vec{S}$	<i>Gauss-Ostrogradsky</i> $\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$
$\oint_C \varphi d\vec{l} = \int_S d\vec{S} \times \nabla \varphi$	$\int_V \nabla \times \vec{E} dV = \oint_S d\vec{S} \times \vec{E}$
<i>Green-1</i> $\oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_V (\nabla \psi \cdot \nabla \varphi + \psi \Delta \varphi) dV$	<i>Stokes</i> $\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$
<i>Green-2</i> $\oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS = \int_V (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV$	$\oint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$

Literatura

- [1] Bansal, R: *ENGINEERING ELECTROMAGNETICS*, University of Connecticut, USA, 2004.
- [2] Gamo, A: *EKSPERIMENTALNA FIZIKA*, Državna štamparija, Beograd, 1877.
- [3] Đurđević, D: *ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROMAGNETIKE*, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica, 2009.
- [4] Marković, V: *ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROMAGNETIKE I OPTIKE - opšti kurs*, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2003.
- [5] Petković, D.M: *ELEKTROSTATIČKO POLJE - u radnoj i životnoj sredini - prvi deo*, Fakultet zaštite na radu, Niš, 2003.
- [6] Popović, B.D: *ZBORNIK ZADATAKA IZ ELEKTROMAGNETIKE*, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.
- [7] Popović, B.D: *ELEKTROMAGNETIKA*, Građevinska knjiga, Beograd, 1980.
- [8] Surutka, J: *ELEKTROMAGNETIKA*, Građevinska knjiga, Beograd, 1971.
- [9] Surutka, J: *OSNOVI ELEKTROTEHNIKE*, Naučna knjiga, Beograd, 1987.
- [10] Tamm, I.E: *FUNDAMENTALS OF THE THEORY OF ELECTRICITY*, Mir Publisher, Moscow, 1979.
- [11] Veličković, D.M: *METODI ZA PRORAČUN ELEKTROSTATIČKIH POLJA*, Podvis, Niš, 1982.
- [12] Veličković, D.M: *ELEKTROMAGNETIKA - prva sveska*, Elektronski fakultet, Niš, 2000.
- [13] Veličković, D.M i saradnici: *ZBIRKA REŠENIH ISPITNIH ZADATAKA IZ ELEKTROMAGNETIKE - prvi deo*, Elektronski fakultet, Niš, 2000.
- [14] Vorgučić, A; Mitić, D: *OSNOVI ELEKTROTEHNIKE - ELEKTROSTATIKA U OBLIKU METODIČKE ZBIRKE ZADATAKA*, Elektronski fakultet, Niš.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

537.2(075.8)

ПЕТКОВИЋ, Дејан М., 1952=

Elektromagnetna zračenja : izvodi sa
predavanja i vežbi. Sv. 1, Elektrostatika /
Dejan M. Petković, Dejan D. Krstić. - 3.
izmenjeno i dopunjeno izd. - Niš : Fakultet
zaštite na radu, 2014 (Niš : Maneki Neko). -
93 str. : ilustr. ; 24 cm

Na vrhu nasl. str.: Univerzitet u Nišu. -
Tiraž 200. - Bibliografija: str. 93.

ISBN 978-86-6093-052-3

1. Крстић, Дејан Д. [аутор], 1969-
а) Електростатика

COBISS.SR-ID 207316492